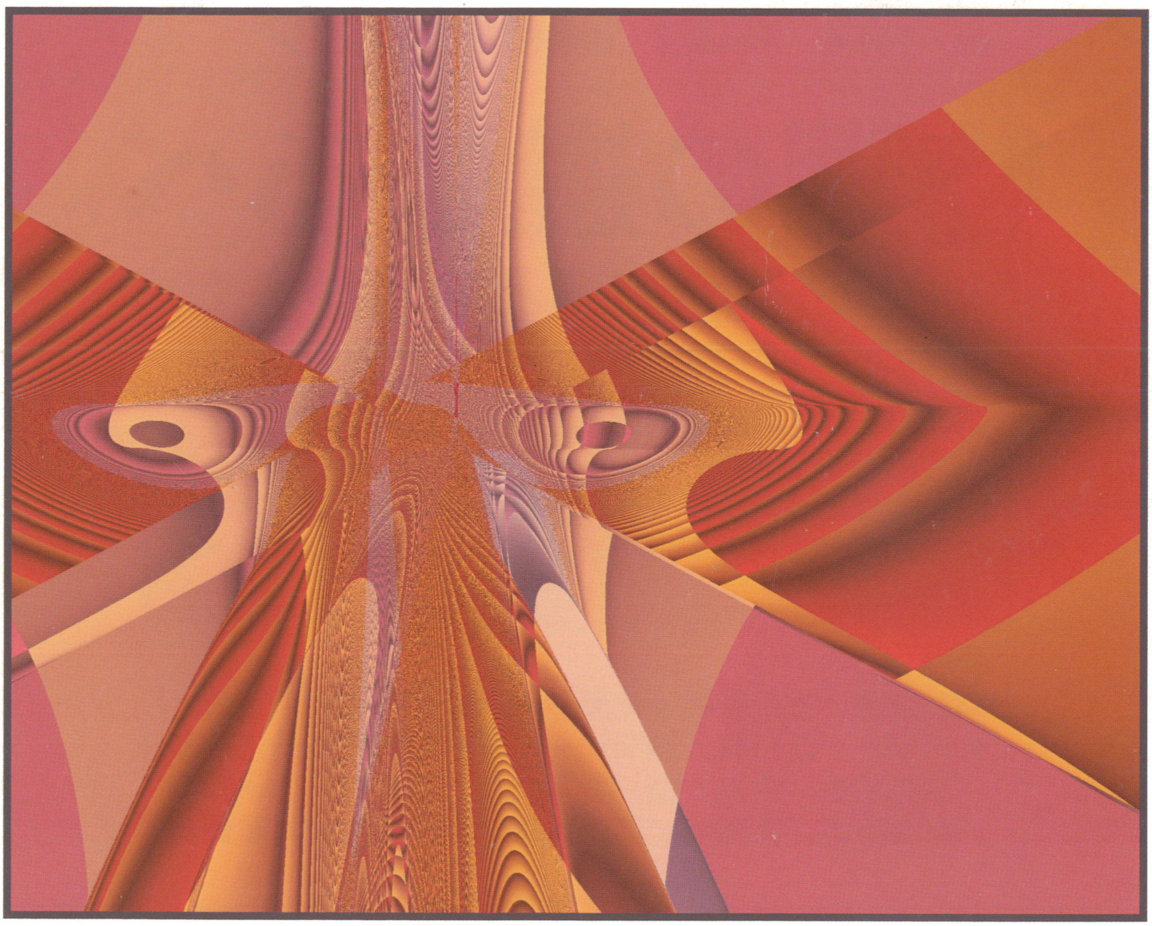
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年5月1日発行　第49巻5号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

5
2011

特集　初学者を悩ます数理の概念
理解のためのヒントを探る



No.575

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 575 May 2011

初学者を悩ます数理の概念

理解のためのヒントを探る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2008年/5 省略

2008年/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観

2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求

2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和

2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体

数理科学臨時別冊一覧

10年/6 非線形現象と微分方程式
10年/7 数物系のための圏論
10年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10年/12 行列解析の基礎
11年/1 超弦理論の基礎
11年/3 繰りこみ群の物理と数理
11年/4 超重力理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

May 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 575

対談：初学者を悩ます数理の概念

河東 泰之・鈴木 香織

大学の理工系学部に入学すると，講義ではさっそく，初めて遭遇する数理的概念や言葉がたくさん出てきます．また，それらの多くは抽象的で，その理解に困難を伴う人が多いと思います．

連続や収束といった微積分の抽象概念を初め，代数学や幾何学，確率論などに登場するその他の“悩ましい”概念について，どうしたらその壁を乗り越えることができるのか，今回の特集では，それぞれの分野の初歩的解説も踏まえて，新入生や学部生向けにわかりやすく解説していただきました．

この巻頭では，特集テーマである数理科学に登場する悩ましい概念について，初学者がつまづきやすい箇所と理解のポイント，また学習する上でのアドバイスも含めて，河東泰之先生（東京大学大学院数理科学研究科）と鈴木香織先生（横浜国立大学経営学部）のお二人に，教育現場での体験談も交えながら語り合っていただきました．

（編集部）

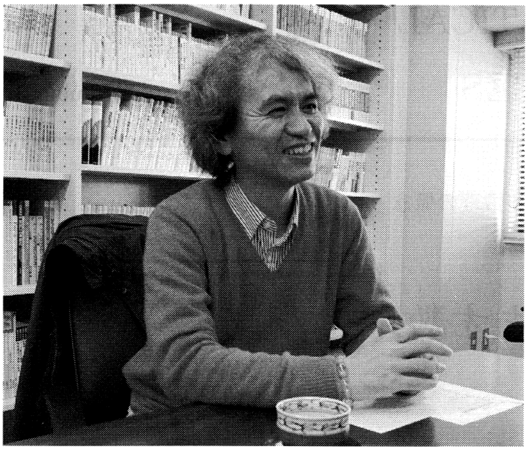
1. 初学者を悩ます数理の概念

編集部：大学の理工系学部では，微積分の講義で初学者がつまづく箇所として，ε–δ 論法に代表されるような抽象的な所がよく挙がるかと思いますが，先生方が講義をされていてもそういった傾向はお感じになるでしょうか．また，その他の所でも，つまづく原因なども含めてお聞かせいただけますでしょうか．

河東：いろいろな段階でわからないことのいろいろな種類があるわけですが，抽象的なものが難しいというのはまず明らかなことで，数学が今まで得意だと思って計算などに熟達していても，証明や論理には弱いというのはよくあるパターンですね．命題の否定をとるだけもかなりできない人が多く，すると背理法でやろうとしても結論の否定がそもそも書けないということになります．

計算にしても，やはり抽象度が高くなってきたり，次元が高くなってくると，高校までに比べて演習などもしなくなるために，なかなかついていけなくなるということがありますね．それ以前にそもそも高校までの段階で基礎が身に付いていないという場合もありますが．

鈴木：東京工業大学で微積分の演習を教えていたとき，授業後の相談室も担当していました．当時理系のクラスは全部統一した教科書を使っていて，その教科書の ε–δ 論法のところを開いて，数十人ぐらいの学生が数人ずつのグループで来るのに対応していくのですが，気が付くと同じ説明を何度もしていたり，途中から入ってきた人がいたりすると，わからないのでもう一度最初からやり直したり…（笑）．4月の終わり頃は毎日，ε–δ 論法に



河東泰之氏.

ついての同じ質問ばかりだったのを覚えています.

ε–δ 論法の説明をするときには図を描くと割とわかりやすいと思うのですが，あまりそれが載っている教科書がないとそのとき感じました．また，日本語を読んでいるだけではわからないけれど，自分の手を使っていろいろ工夫してみる，という次のステップをしないままいきなり質問に来ている印象を学生からは受けました.

編集部：鈴木先生は，現在は経営学部で教鞭をとられておりますが，理系と文系の学部との違いをお感じになることはありますか.

鈴木：そうですね．理系も文系もつまづく箇所は大体同じです．文系では，高三のときに数学をとっていない人もおり，時間的にも数学から離れていた時間が長いため，数学的な感覚がなくなっていたり，計算すらできなくなっていたり，また，中学で習った集合の記号なども，まるっきり忘れてしまっているという傾向はあるように思います.

逆に，自分は数学に慣れていないと自覚している人は，経済・経営を学ぶために必要だというモチベーションも高いです．理系に比べて理解力が高かったり，論理的思考力に長けている人もいて，上下差が大きいです．また，多様性から見ると，文系のほうが広いので，そういう意味でつまづく所も広いと感じます.

2. つまづく箇所の共通点

編集部：今回の特集では，数学の様々な分野が取り上げられていますが，これらの分野を学習する上で，つまづく箇所の共通点などはあるでしょうか.

鈴木：自分がわかっているのか，わかっていないのか，はっきりしない状態で，そこをクリアにしないというのがつまづく第一歩だと思います．そういうことを放置している学生が多いです．つまづく前の段階で，ほんのちょっとわからなかったり，何かひっかかるだけ，というような場合でも，大体わかっているからいいや，といってそのままズルズル引きずっていき，結局何がなんだかわからなくなってしまうという深刻なケースは，どの科目にも感じます.

河東：どれがわかったか，わかっていないかの区別を突き詰めていない状態で来てしまうので，「わかりましたか」と聞いても，自分でもよくわからないと言う人が多いですね.

編集部：大体こういうケースは，4 年生になって，セミナーなどで前で話していると如実に発覚するような気がしますね.

鈴木：それはありますね（笑）.

河東：その時点になって初めて，今まではわかっていなかったことがわかることはよくありますね.

鈴木：試験の直前に学生が質問に来て，なぜできないかを考えながら，こちらも逆に質問していくのですけれど，細かく戻っていくと 4 月ぐらいにやったことを実は全然わかっていないことが原因だったとか，そういうことはよくあります.

河東：論理的に厳密にやらない場合でも，高校のときに比べれば，極限とか n 次元空間など抽象度は高くなってくるので，授業でぱっと聞いただけでそう簡単につかめるものでないのは当然だと思います．演習問題などもたくさんやらないと感覚もつかめないわけですが，高校に比べればそういうこともしなくなりますし，授業で使う教科書にもあまり問題も載っていない場合もありますから，結局ズルズルと引きずってしまうという傾向があ

るようですね．

鈴木：文系ですと，微積分や線形代数を普通に授業でやるだけで通常は演習がありません．本来ならば文系の人は数学的な感覚を復活させる必要がありますから，問題数をこなす必要があるわけですが，それにも関わらずひどい場合は授業の講義だけ聞いてテストを受ける，というケースもあります．

理系でも，能力別にクラス編成するなど工夫している大学もあるのですが，大体は大人数のクラスのまま微積分と線形代数を一週間交代で演習するので，当然もう少し自分でも補う必要が出てきます．そういうことがわかっていない人がいて，とくに単位を落とす学生には多かったですね．

試験勉強はノートだけ完璧にやったと言っていて，教科書の章末問題などを解くことをせず，そういう必要があるということを知らない学生も以前より多い，と感じます．

河東：大学の１年分でやる数学というのは，高校での１年分に比べて多いわけですが，学生を見ていると，高校のときに比べて数学をそれほどやらない人が多いですよね．

鈴木：最初の質問の中に，つまづく箇所として抽象的なことが挙がっていましたが，大学１年の物理では偏微分の計算が数学の授業より先に出てきます．そこで計算だけはできるようになっているから，数学の授業で習ったときに，どうしてこんな抽象的な定義をしなくてはいけないのか，となって結局それで授業をちゃんと聞かないうちに問題も解けなくなってしまう，という傾向もありますね．

編集部：工学系の学生にもそういう傾向は多いでしょうか．

鈴木：そうですね．マークシートの弊害かもしれませんが，答えが合っているのだから正解にしてほしいと言ってくる人も多いですね．さすがに数学科の人はいないですが…．東工大の相談室のときなのですが，数学科の先生はどうしても途中の説明をするので，ある学生でレポートの答え“のみ”を教えてほしいと言ってくる人がいて困った経験があります．こういう例は受験戦争の弊害のような気がしますね．



鈴木香織氏．

河東：高校までの教え方や人にもよるのですが，答えが合ってるかどうかが一番重要だと思う人は多いようですね．

鈴木：私は，答案の中にちゃんと日本語を書く，ということをまず大学１年の授業で教えますが，学生に驚かれますね．式の羅列ではなく，理科のレポートで考察を書くのと同じように，と教えるのですが，半年後に２年生の別の授業でまた元の黙阿弥に戻ってしまう人を見ると悲しいです．

河東：入学試験の答案でも，式だけしか書いてなくて，なぜこうなっているのか説明が足りない例はとてもたくさんありますね．

鈴木：文中にない記号を，いきなり答案に書いても平気な人もいますよ．

河東：受験の段階で，途中で出鱈目なことをやっていても，最後の答えが合っていれば自分はできたと思ってしまうようですね．

3. 壁を乗り越えるには――学習のポイント

編集部：こうした様々な“悩ましい”壁を乗り越えるポイントとして，講義の聴き方や本の読み方などがあるかと思いますが，学生さんに勧めたい方法などありましたら，お聞かせいただけますでしょうか．

河東：本もいろいろなものがありますし，先生によって授業のやり方もいろいろありますから，わからなくても本や先生が悪いという場合もあると思います．本は山のようにあるわけですから，まずは自分に合う本を探してみるとか，友達と話し合ってみるとか，ある程度はそういったカバーはできると思います．

鈴木：例えば，指定された教科書が合わなくても，他のクラスで指定されたものが合う場合もありますから，生協などで配られる一覧表を参考にして，図書館で見てみるとか，そういう探し方はあると思います．

編集部：ノートの書き方などで何か工夫の仕方などあるでしょうか．

鈴木：板書をそのままノートに写すのに夢中になってしまい，そのため，授業を満足に聞くことができずに終わってしまう学生が多いようです．私は，後から来た人のために日本語を割と長めの文章で書いているのですが，自分なりに手早くまとめつつ重要なポイントをおさえたり，先生の話していたことをメモで入れるなどの工夫をしない人が増えていると思います．

河東：私もたくさん文章などを黒板に書くのですが，多すぎてノートに書ききれないとよく言われます．私はみんなにわかるように書いているわけですが，ノートをとるほうは要領よく自分だけにわかるように書けばいいだけですよね．

鈴木：こういうことは，普段から日本語を書く機会が少ないために，まとめることができないのではないかなと感じます．

4. 高等学校までの学習内容の変化と大学教育

編集部：近年は高等学校までの教育内容がよく変わりますが，そのことによって大学に入学した学生さんがつまづく箇所に変化は出ているのでしょうか．

河東：まず一番問題なのは，先生たちの中で今高校で何が教えられているのかをわかっていない人が多いということですね．自分が習ったのだから知っているはずと思っている先生もいますので，ちゃんと学生からも習っていませんと言う必要があるのですが，それもなかなか言わない人もいます．線形代数のように，高校で行列を習っていないと最初敷居が高い例もあると思いますね．

鈴木：私のときは，文系でも行列やベクトルなどは履修範囲でしたから，例えば高二まで必修でやっていれば，1 年間のブランクはあったとしても，線形代数をやるときにそれほど違和感はなかったと思うんですね．それが今は，大部分が数学 C という単元に入っているので，行列を知りませんという人が多くなっています．理系でも，数学 III をとったけれども数学 C はとっていないという人は私立には多いです．そういう意味では，微積分より線形代数のほうが，高校と大学の差が広がっていて，問題があるように思います．

河東：高校までの範囲で，先生たちが期待している所まで達していない人がいるので，そういう所でつまづいていると，当然 ε–δ 論法がわからないというレベルにさえもならないわけですが，それでも「自分は理解が足りないな」という自覚さえあれば，それなりの対応はできると思います．授業はその間にも進んでしまいますから，ついていくのはもちろん大変ですけれども….

鈴木：大学側も基礎数学のような高校数学に心もとない人を対象にした科目を設けたり，教育センターを新設しているのですが，まず自分がわからない所を聞きに来なければ対応できませんから，難しい問題です．

あと，全体的に見て，学生が難しいと感じる箇所は大体一緒なのですが，それに対処できない人が増えていると思います．つまづいた後，立て直せない人が多いです．逆に，何とかしようと思って質問しに来る学生もいますので，本人が自覚してくれるのが最初の一歩ですね．

河東：最初の話にも出ましたが，学生も質問してくれればいいのですが，わからないまま放置してしまって，どんどん悪いほうに進んでいってしまうケースが多いですよね．



鈴木：用語の違いというのもあるかもしれませんね．中学では集合の“要素”と習っていて，“元”とは習わないので，教えるときもそういう説明を入れる必要があります．

定理でも命題でも，自分でわかっていないなと思ったら，実際に書き出してみるのがいいと思います．大体わかった，というのが一番危ないので，何も見ないで書けるか，人に説明できるか，そういう所から自分が本当にわかっているかどうか判断してほしいなと思います．

河東：高校までだと，定理が重要だという意識があまりないですよね．

鈴木：定理の仮定をあまり重要視していないように思います．仮定を満たしていないから適用できないのに，その定理を使って解いたことにしてしまうというようなケースはありますね．

編集部：そういう例は答案を書く上でもありそうですね．個人的なことですが，仮定を入れなかったことで大幅に減点された経験があります．

鈴木：私も仮定のチェックがないと減点しますよ(笑)．例えば，ロピタルの定理を用いる問題のように本当の答えと違うものが出てくることもありますから．

編集部：また，大学に入ると記号の量が増えると思うのですが，それに慣れないことでつまづくことなどはあるでしょうか．

河東：そうですね．大学では，例えばベクトルの記号などは統一されてないものがありますから，そういうことで戸惑う人はいるでしょうね．

鈴木：物理と数学の先生で違ったりする例もありますね．

河東：定理なども，記号表記はそのときの都合で決めているだけなので変えてもいいわけですが，そういうこともわからない人もいるようです．

鈴木：微分の記号で $f'(x)$ と $\frac{df}{dx}$ がありますが，学生は $f'(x)$ のほうばかり使いたがります．偏微分に入って，特に全微分や変数変換の公式のあたりでようやく $\frac{df}{dx}$ と書く利点が実感できるようです．そこに至るまでは，なぜ複数の記号が使われるのか疑問を持つ人も多いです．

線形代数で，連立方程式を掃き出し法などで解いていると，なぜ中学までのやり方ではいけないのかと思われたりしますので，そういう点で自分の授業でもまだまだ工夫できることがあるかと思います．早いうちに，「後でこういうことをやるから今これが必要なんですよ」と予告をしておいてあげれば，少し学生のモチベーションが上がると思いますね．

5. “理解する” ということについて

編集部：先ほど話にも挙がりましたが，図を描くことができない学生が多いということですが….

河東：セミナーでも全然図を描かない人は多いですよね．

鈴木：単射とか全射は図に描いたほうがわかりやすいですよね．ただ，図に慣れすぎてしまうと，答案に図だけ描いて終わりにしてしまうので，ちゃんと文章も書いてほしいです．

編集部：図と式のつながりができて，人にちゃんと説明もできて，一つの理解ができたということになるでしょうか．

鈴木：そうですね．文章で定義を理解したと言っていても，単に丸暗記しているだけの人もいるので，本当にわかったという所までいってほしいです．

それと，図を描きながら説明をされると理解できるものでも，その図だけを見せられたら理解できないものも多くあると思います．

河東：最終的に完全で論理的な表現と，人間が頭の中にあるイメージとは違うわけで，両方を行ったり来たりできないと難しいわけですよね．

編集部：一般の n 次元などで語る命題などは，教え方に工夫をされたりするのでしょうか．

河東：抽象的な n 次元空間の話は，やっぱり難しいですよね．これは授業によっても変わりますが，例えば，対角化とか固有値は 3×3 までしかやらないという方針もあります．

鈴木：私の場合は，3×3 は全部できて当然として，4×4 を主に試験で出します．3 次元は現実の世界だから理解できるわけで，4 次元は一般次元の始まりだからという理由です．理系の場合は，最低 5 次元までやります．4×4 の行列式は 3×3 の公式に帰着しますが，5×5 の場合は違うという理由です．

また，経済・経営系で扱う輸送問題ではたくさんの運ぶべき材料が出てきますから，逆に文系の人のほうが高い次元で計算できたほうがいいわけです．数字の計算結果に対しては，理系の人より文系の人のほうが鋭くないと会社でも力を発揮できないと思いますから．

河東：確かに，実際に応用する人と比べると，純粋数学の人たちには計算が苦手ということもあると思います（笑）．

鈴木：ものすごい簡単なことでつまづく例なのですが，文字の所に文字を代入する問題になると，たちまち混乱する学生がいます．数字を代入することはできるのに，例えば x に $\frac{1}{x+1}$ を代入するような話になると駄目というのがそうですね．合成関数を教えるときにそのような状況が出てくることが多いのですが，こういう所で理解度がよくわかります．

6. メッセージ

編集部：最後に学生さんへのメッセージをお願いします．

河東：今学んでいる数学は長い歴史を経た難しいもので，簡単にわかるわけではないのは当然です．論理的なことも，計算にしても，時間をかけて練習しないと身に付きませんし，逆にそうやって身につければ，非常に幅広い応用ができるようになると思いますので，頑張って勉強してください．

鈴木：自分がわかっていないということをわかっていない，というのが一番悪い状態です．また，自分がわかっていないのがわかっているのに，何もしないというのも，それに続く悪い状態です．自分はまだわかっていないので何とかしなければ，と思っているならば，もうほとんど大丈夫なので，あとは原因となっていることを克服するように頑張ってほしいと思います．

編集部：本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2010 年 12 月，千駄ヶ谷サイエンスビルにて）

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）
（すずき・かおり，横浜国立大学経営学部）

言語としての数学



新井 紀子

1. 盆のような月

ヒト（ホモ・サピエンス）の生理的特徴として二足歩行と共に挙げられるのが，言語によるコミュニケーション能力である．サルやハチの中にも，身振りやダンスなどのコミュニケーション手段を持つ種も確かに存在はする．しかし，決まりきった情報だけでなく，複数の表現を文法に従って組み合わせることで，自在に意思や情報を伝達できるという点で，ヒトがもつ言語は，それ以外のコミュニケーション手段とは一線を画す．つまり，ヒトは言葉を操る稀有なる動物なのだ．

そのような視点から改めて数学を眺めてみると，実は，数学もヒトが用いる「言語」の一部であることに気づかされる．しかも，数学という言語は，日常会話に使っている自然言語と密接に関連しながらも，ある目的のために，独特の発達を遂げてきた．まずは，その目的を探っていくことから始めることにしよう．

物理学の目的は，宇宙や量子など自然現象を貫く理（ことわり）を解明することにある．生物学の目的は，生命の神秘を解明することにあるだろう．

では，数学の目的はどこにあるのだろうか．数や図形の性質を解明すること，という答えがややもすると返ってきそうだが，数や図形は，星や遺伝子とは本質的に異質な存在である．星や遺伝子は実在して望遠鏡や顕微鏡で眺めることができるが，ゼロや円は物理的に存在するものではなく概念，つまりヒトの心の中に在るからだ．

円には，微細なものから巨大なものまで実に様々なものがある．不思議なことに，私たちの脳は，大きさも色も線の太さも多様な「円のような形」のことを，円として認識する．「盆のような月」という表現は，まさにそのことを示しているといえよう．もちろん，盆を持たない民族もいるから「盆のような月」という表現自体には普遍性はない．が，性別・地域・時代に関わらず，私たちは「円のような形」をそれ以外の形から見分けることができる．この普遍性は一体何に由来しているのだろう．それは，数学が超越的な存在だからではない．ヒトという種の認知の仕方，つまり「心」というシステムの共通性が，私たちに「盆も月も同じような丸い形をしている」ことを認識させるのである．

ヒトだけでなく他の動物も，脳という器官を用いて外界の情報を処理する．その中で，ヒトだけが，盆と月という対象からの情報を円という抽象的なカテゴリーに分類して「類似性のあるもの」として受け止める．このようなヒト特有の外界の受け止め方を，私たちは「概念」と呼ぶ．数学が扱うのは，実在する対象ではなく，対象の受け止め方なのである．ただし，個人の自由な受け止め方は，数学では研究対象の外にある．数学の対象は，個人や文化になるべく依存しない，つまり普遍的な受け止め方に限定される．

数学は，数千年かけて，「概念」を扱うための方法論を構築してきた．それは，数学だけでなく，科

学全体の方法論である．科学の研究対象は，具体的事物や現象であるが，それらを私たちが受け止めるには概念化が不可欠である．そして，概念に関して論理に基づいて論ずる方法論を提供しているのが数学なのである．例えば，物体が動く様子を運動という概念で捉え，それを数学の言葉で表現することで，物理学は初めて運動について論じられるようになった．

数学は科学全体の言語活動を担っているのだ．

2. 科学の言語としての数学

心の中にある概念を一体どうすれば扱うことができるのだろうか．例えば，円のイメージはどのようにすれば言語によって表現し，他の人間に確実に伝達することができるだろうか．「円とは盆のような形」のように例示することが，まずは思い浮かぶ．しかし，盆は円形とは限らない．楕円や長方形のものもあるだろう．例示による表現には，常にこのような限界がつきまとう．よって，例に頼らない抽象的な表現が必要となる．次に思いつくのが「ゆがみがない丸い形」のような表現だろうが，「丸さ」を表現するために「丸い」という形容詞を使ってしまっては説明になり得ない．

今から約2300年ほど前，古代ギリシャの数学者エイクレイデス（ユークリッド）は『原論』という書物において，たぶん歴史上初めて，円の定義を著した．

「円とは一つの線に囲まれた平面図形で，その図形の内部にある1点からそれへひかれたすべての線分が互いに等しいものである」[1)]

円という私たちが共有するイメージは，「丸い」を表す言葉が発せられてから数千年，ことによると数万年かかって，ようやく言語化されるに至ったのだ．エウクレイデスによる円の定義は，現在の数学の表現から見ると不完全で，現在は次のような形に整理されている．

「平面上の一点 O から一定距離 $r>0$ にある点全体のなす図形を中心 O，半径 r の円という」[2)]

円の数学的定義が存在するから，私たちは「円」という形を認識できるようになるのではない．円に限らず一般に数学の定義には，私たちの意識の中に潜んでいる何らかの共通イメージを発見し，それを言語化する働きがある．

3. 大学数学における典型的なつまずき

大学数学でつまずいたという感想をもらす学生に聞いてみると，計算の難しさなど技術的な理由を挙げる者は比較的少ない．もちろん複雑な部分積分の箇所に関する質問は少なくないが，「どこがわからないかさえわからない」という感想が漏れるのは，写像や同値類，線形空間や位相などといった概念に関する箇所である．それは，数学が言語であるという認識に失敗していることが原因のように思う．

数学は言語活動の一つである，というと，多くの学生が怪訝な顔をする．高校を卒業したばかりの学生にとって，言語を扱うのは英語か国語の専売特許であり，数学のやるべき仕事は問題を解くことと計算をすることだからだろう．しかし，「写像」，「同値類」，「線形性」などは定義であり，計算法や解法ではない．また，登場する演習問題の多くは，「連続であるからといって一様連続になるとは限らないことを示せ」に代表されるように，定義された概念のイメージや概念間の差異や同値性を問うものである．

数学が言語活動であることを示す格好の例として**距離**（**distance**）の**公理化**を挙げることができるだろう．「距離」は日常会話の中でもしばしば登場するありふれた言葉だ．例えば「ここから駅までは相当な距離がある」といった使い方をする．ただし，その用途は位置や場所の隔たりを表すに留まらず，「心の距離」などといった使い方もする．場所と心という全く異なるものに言及しているにも関わらず，「距離」という同じ言葉を使って私たちは何かを表現しようとする．その共通点を抜き

出し，数学の言葉で表現する作業こそが公理化なのである．

では，「距離」という言葉で，私たちは心のうちにどんなイメージを描いているのだろうか．

私たちが「距離」という言葉で表現しようとするのは，「ここから駅までの距離」や「私と彼との心の距離」が示すように，「2つの対象間の隔たり」である．数学的に表現すると，距離とは（場所や性質，表現など扱っている対象の）集合に含まれる2つの対象について定義されるということになる．

距離感を表現するときに「近い・遠い」というような形容詞を使う．例えば「駅よりも学校のほうがここからは近い」，「彼女は遠縁の親戚にあたる」というような表現である．これは，距離が比較可能であるべきだということを示唆している．比較可能とは大小が決まることに他ならない．

大小が決まることのどこが数学的に重要なのか，と思うかもしれない．しかし，よく観察すると，実数のように任意の2つの要素間の大小が決まる数学的対象は決して多くないことに気づくだろう．例えば，$3x+2$ と $\sin x$ の大小を問われても，困惑するに違いない．

距離の公理は，まず，距離関数 d を「集合 X 上で定義された2変数の実数値関数 $d\colon X \times X \to R$」だと想定するところから始まる．2つの対象の隔たりについて私たちが論じるとき，私たちはその隔たりを数値のようなものに置き換え，その大小によって「近さ・遠さ」として認識しているのではないか——この一文は言外に，そのようなヒトの認知に関する仮説を表現しているのである．

ただし，距離と実数では異なる性質もある．実数には最小元は存在しない．言い換えると，どんな実数 a に対しても，それよりも小さな実数 b が存在する．しかし，距離はそうではない．「ここ」から一番近い場所は，「ここ」であり，「私」に一番近い親戚は「私自身」である．このことを表現するには，新たに2つの公理が付け加えられなければならない．数学的に表現すると，以下のようになる．

$$d(x,y) \geq 0,$$

$$x = y \leftrightarrow d(x,y) = 0.$$

次は，やや気づきにくいことではあるが，2つの対象間の距離はどちらを起点にしても変わらない，という性質がある．数学的に表現すると，以下のようになる．

$$d(x,y) = d(y,x).$$

私たちにとって最も身近な距離の一つが数直線上の2点間の距離だろう．数直線上に2点 x, y が与えられたとき，その間の距離は $d(x,y) = |x-y|$ で与えられる．当然のことながら，d はこれまでに述べた性質をすべて満たす．

では，以上の公理を満たせば必ず「距離らしく」見えるかというと，必ずしもそうではない．その証拠として，先ほど定義した $d(x,y) = |x-y|$ に良く似ているが少しアレンジした次のような関数 f を考えてみるとよい．

例 3.1　f は $0 \leq x, y \leq 2$ で定義された次のような実数値関数である．

$$f(x,y) = \begin{cases} |x-y| & |x-y| \leq 1 \text{ のとき}, \\ |x-y|-1 & |x-y| > 1 \text{ のとき}. \end{cases}$$

f はその値が1になるまでは普通の意味の距離だが，1に達するとリセットされてしまう．f は明らかにこれまで述べてきた公理を満たすが，距離とは言い難い．なぜ距離とは言い難いのかを突き詰めると，「$1 = f(0,1) > f(0,1.1) = 0.1$ になっているのが承服しがたいから」という結論に達するだろう．これを厳密に言語化すると，「0から1.1を経由して1に戻ったほうが，0から直接1に行くよりも距離が短くなるのは不自然」ということになろう．

$$f(0,1) > f(0,1.1) + f(1.1,1)$$

という不等式が成立していることが距離として不自然なのである．「回り道をしたほうが近いのは不自然だ」と感じるのは，まさに種としてのヒトの知恵である．つまり，d が距離ならば，次の不等

式を満たさなければならないと私たちは感じるのである．

$$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z).$$

これを**三角不等式**と呼ぶ．なぜなら，平面においては，この不等式は「三角形の一辺の長さは他の二辺の長さの和よりも小さい」ことに相当するからである．

以上をまとめてみよう．

定義 3.1 集合 X 上で定義された 2 変数の実数値関数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ が任意の $x,y,z\in X$ に対して，次の条件を満たすとき，d を X の距離関数という．

1. $d(x,y)\geq 0.$
2. $x=y\leftrightarrow d(x,y)=0.$
3. $d(x,y)=d(y,x).$
4. $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$ (三角不等式).

論理的には，単に互いに矛盾がない命題を並べれば公理と称することはできる．しかし，それでは良い公理が得られるとは限らない．良い公理化のためには，ヒトとしての経験や知恵，さらには経験を抽象化する言語能力が不可欠だということを距離の公理は私たちに伝えてくれる．

4. 無意識による支配からの脱却

経験を言語化することで公理化が終わるかというと，そうではない．距離の公理には忘れてはならない最後の一文がある．

d が集合 X 上の距離であるとき，対 (X,d) を距離空間と呼ぶ．

私たちの認知は言語化されていない無意識に支配されている．私たちが平面を思い浮かべるとき，そこには既に距離がある．数直線を思い浮かべるとき，そこには既に長さがある．つまり，思い浮かべるという行為に予め距離という感覚が「埋め込まれて」しまっているのである．距離に関する先入観はヒトの生き残り戦略にとって重要な意味をもつため，特にその支配を退けることが極めて難しい．しかし，それでは，「距離といえば，場所の隔たりのこと」という枠組みから一歩も進むことができず，公理化をするメリットが何もない．

距離の公理の最後に書いてある一文は，距離 d という「眼鏡をかけて」集合 X を改めて眺めてみよ，ということを私たちに命じる．「集合 X とその上で定義される距離 d とは論理的には分離して考えることが可能なはずだ」と．これによって，私たちは初めて，無意識による支配から自由になることができる．それは経験というどこまでいっても有限でしかあり得ない枠組みからの脱却を意味する．

（公理さえ満たしていれば）距離を定義する主体は私たちであり，自らが与えた距離という眼鏡を使って，集合 X を新たに認知する力を得る．この行為を数学者はしばしば「集合 X に距離を入れる」と表現するのである．

実際に距離を入れて，新しい眼鏡の使い心地を試してみることにしよう．

例 4.1 任意の実数 x,y に対して，h を次のように定義する．

$$h(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\text{ のとき},\\ 1 & x\neq y\text{ のとき}.\end{cases}$$

例 4.1 のように定義したとき，h が実数上の距離となるのはほぼ明らかである．にも関わらず，h を「距離」だと思うには精神的な苦痛が伴う．それは私たちが慣れ親しんだ「距離」とはあまりにもかけ離れているから．

けれども，この眼鏡に慣れてくると，h は距離としてそれほど不自然ではないという気もする．h は私たちに「もっと物事をシンプルに考えてはどうか」と語りかけてくるのである．

「2 つのものが同じならば同じ，そうでないなら違う．それだけ」

言われてみれば，これほど最も単純明快な距離もないだろう．この距離を入れれば，（等号が定義

されているような）すべての集合を距離空間とみなすことが可能となる．

5. 数学における言語化の過程

公理化は終わりではなく，始まりである．何を始めるかというと，「その公理を満たすような世界ではどのようなことが成り立つかに関する解明」を始めるのである．

距離空間が定義された後，そこでどのような解明活動がされるのかを覗いてみることにしよう．

距離に関連する言葉の一つに「範囲」がある．例えば，O を中心とした半径 $r(>0)$ の円の内部とは一点 O から，距離 r の範囲内にある点の集合である．数学的に表現すると，次のようになる．

$$\{x|d(x,O)<r\}.$$

このように「範囲」という言葉は，「以内」や「未満」という言葉と不離の関係にある．つまり，距離の意味で限界があることを含意しているのである．それを表現する言葉として**有界**という言葉が新たに導入されることになる．

定義 5.1 (X,d) を一つの距離空間とし，A を X の空でない部分集合とする．このとき，$\sup\{d(x,y)|x\in A, y\in A\}$ を A の**直径**と呼び，$\delta(A)$ で表す．ある実数 r が存在し，$\delta(A)<r$ が成り立つとき，A は**有界**であるという．

もちろん，この新たな定義の眼鏡をかけて見ても，点 O を中心とした半径 r の円 A の直径は $2r$ であり，円 A は有界である．が，それだけではない．この眼鏡をかけると，点 O を中心とした一辺が r の正方形 B の「直径」は $\sqrt{2}r$ になるのである．円と正方形は「範囲がある」という意味で（形は違えど）似た性質を持っている．一方，平面全体は（普通の距離の下では）有界ではない．

言葉は単に導入しただけではあまり意味がない．言葉は，言語体系の中で位置付けられて初めて真に意味をもつ．その言葉はどういう文脈で使われ，どの言葉は類義語で，どの言葉とは微妙な差異があるか，そういうことが位置付けられて初めて言葉は「使える」ようになるのである．

それは数学においても変わらない．有界という言葉を導入しただけでは不十分で，その言葉が数学言語の中でどのように位置付けられるかが解明されてこそ，その言葉を導入した価値があるのだ．次のような定理を見ると，数学が言葉をどのように位置づけようとしているかがわかるだろう．

定理 5.1 距離空間 (X,d) が全有界ならば，X は d について有界である．ただし，その逆は一般には成り立たない．

定理 5.2 距離空間 (X,d) が全有界であるためには，X の任意の点列がCauchy 点列を部分列として含むことが必要十分である．

ここでは全有界が何か，Cauchy 点列が何かということには触れない．ただ，次のことを強調しておきたい．これらの定理は「有界」という言葉と同じ意味を持つ表現，あるいは似ているが微妙に異なる意味をもつ表現について述べている．そして，大学数学で学ぶ多くの定理がこのような形をしているのだ．これらの定理は，問題を解いているのでも計算をしているのでもない．これは明らかに**数学という名の人工言語を作る過程**に他ならない．

冒頭で述べた「多くの大学生は数学が言語であるという認識に失敗したせいでつまずいている」とはそのような意味である．

6. 言語としての数学の効用

計算にメリットがあることは誰にでもよくわかる．問題を解くことについても同様であろう．では，言語としての数学には一体どのようなメリットがあるのだろうか．

過去に実際に起こった数学の言語活動を振り返ることでそのメリットを探ってみることにしよう．

20 世紀最大の発明は何かと問われたら「コンピュータ」と答える人は少なくないだろう．日常

生活で意識的にコンピュータを使うか否かに関わらず，生産から医療・通信・交通など私たちの生活全般がコンピュータによる計算で支えられている．そのコンピュータはいかにして生まれたのだろう．工学の発展によってだろうか．そうではない．コンピュータは「計算とは何か」を数学が言語化したことによって生まれたのである．

私たちは小学校において，九九を学び，次に掛け算の筆算を学ぶ．それによって 357×2094 のような掛け算を実行できるようになる．しかし，考えてみるとこれは極めて不思議なことである．なぜなら，学校で学ぶのは3桁どうしの筆算まで（「ゆとり教育」では2桁どうしまで）であり，3桁と4桁の掛け算が戦後の教科書に掲載されたことは一度もないのだから．

掛け算だけではない．どの計算法においても，私たちはいくつかの例を経験するだけで，あらゆるケースについて計算できるようになる．その秘密は「同様に繰り返す」という数学的手順にある．

私たちは $\sqrt{4}=2$ であることや，$\sqrt{121}=11$ であることを知っている．では，$\sqrt{5}$ はどのように計算すればよいか．最も単純なのは以下のような方法だろう．

$\sqrt{5}$ の定義から，

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

という関係が成り立つことがわかる．これによって，$\sqrt{5}$ の整数部分は2に決定される．次に，

$$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$$

から小数第一位が2であることが決定される．後は「同様に繰り返す」のである．

「同様に繰り返す」という言葉の解釈は無限にあり得るが，読者の多くが，次は，

$$2.23 < \sqrt{5} < 2.24$$

という関係を用いて小数第二位を3と決定するべきだと理解したことだろう．これが，「同様に繰り返す」という数学的手順を理解する能力だ*1)．

古今東西のあらゆる計算法は，実は，（九九のような）対応表と，既知の計算の参照，そして「同様に繰り返す」の組合せによって構成されている．逆にいえば，これらの要素によって構成された関数（**帰納的関数**）だけが計算可能な関数だと考えることができる．

計算に関するこのような認識に人間が至り，そのことが言語化されたとき，コンピュータは生まれた．

古代文明の遺跡には人類がシステマティックな計算をした痕跡が例外なく残されている．計算の歴史は数千年以上，ことによると一万年以上遡ることができるだろう．しかし，個々の計算方法を考案したり，計算を実行したりということだけからはコンピュータは誕生し得ない．特に，プログラムを通じて機械に命令させることで，あらゆる計算を一つのハードウェア上で実行させる現代のコンピュータが生まれるには，計算とは何かを言語化することが不可欠だった．

数学による言語化は，そのような爆発的な力を持っているのだ．

*1） ただし，脳機能の在り方によって認知の仕方は当然左右される．数学が全ての市民に必要なリテラシーであるならば，個に応じた数学教育法の開発が今後は望まれる．

参考文献

1) ユークリッド著，中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳・解説『ユークリッド原論』共立出版，1971, 560p.
2) 青本和彦，上野健爾，加藤和也，神保道夫，砂田利一，高橋陽一郎，深谷賢治，俣野博，室田一雄編著『岩波数学入門辞典』岩波書店，2005, 738p.
3) ニコラ＝ブルバキ著，村田全・清水達雄・杉浦光夫訳『ブルバキ数学史（上）』ちくま学芸文庫，筑摩書房，1984, 318p.
4) ニコラ＝ブルバキ著，村田全・清水達雄・杉浦光夫訳『ブルバキ数学史（下）』ちくま学芸文庫，筑摩書房，1984, 350p.
5) 新井紀子『数学は言葉』東京図書，2009, 243p.
6) 新井紀子，新井敏康『計算とは何か』東京図書，2009, 213p.

（あらい・のりこ，国立情報学研究所）

微積分



坂井　秀隆

大学の初年度においては，微積分と線型代数の2つを学ぶというのが標準的である．2つのうち，いろいろな意味で線型代数のほうがまとまりがあって，すっきりしている気がする．私の個人的感想だが，勉強した結果として，わかったという達成感があったのは線型代数のほうだったと思う[*1)]．

それに比して，微積分の本を見てみると，いろいろなアイディアがばらばらに並んでいて，おもちゃ箱のようだ．なかなか微積分の内容を理解したとは言い切れない．

以下の文章では，主に大学で数学を勉強する人たちを想定して，微積分という科目で学ばれる様々な側面について，思いつくことを書いてみたい．

1. 計算
〜立ち止まることと，先に行ってみること

アメリカやヨーロッパでは，大学初年度から学ぶ，この微積分に相当する科目を，計算（calculus）と名付けていることが多いようだ．微積分の技法を使わない計算などいくらでもあるわけだが，微積分において扱われる考え方，方法が，様々なものを計算するというときの，幅や奥行きを，格段に広げたのは間違いのない事実である．

だが，高校から大学に入って目新しいのは，ϵ-δ 論法であったり，基本列やら一様収束であったりで，定理の形で書かれる一般論が重要であると思うと，なかなか個々の計算が目に入ってこないという人もいるのではないだろうか？

個々の計算こそが重要である．理論はそれらの計算を正当化するためのものである．それぐらいの意識があってもいいと，私は思う．とくに典型的な例など，丸々覚えてしまっていいものも多い．

ところで，微積分で現れる計算と，それ以外の代数的な計算とはどのように違うだろうか？ 等号による式変形であっても，微積分での計算においては，先に進んでいいのかと心理的に躊躇してしまうときがある．極限の取り方の順序交換などには注意せよとさんざん言われているので，先に進んでいいのか確信が持てずに，止まってしまうのだ．だが，そのようなときも，とりあえず計算を続けてみて，変なことが起きていないかは後で考えるというのも，一つの方法だろう．

ここで，有名な計算の例の一つを見てみよう．正規分布に関係する積分の計算だ．まず $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ とおく．

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy \\
&= \int_{r>0,0<\theta<2\pi} e^{-r^2}rd\theta dr
\end{aligned}
$$

*1)　あとで，勘違いだったとわかるのだが．

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \right) dr = \pi,$$

よって，$I = \sqrt{\pi}$ となる．

式変形自体は簡単だが，行間を読むと，多重積分における広義積分の性質やFubiniの定理など，いちいち正当化すべきものであることに気づく．とくに，多重積分における広義積分の収束には気をつけたい．あとで，収束しない場合に，計算がうまくいかない例を見るつもりである．立ち止まることと，とりあえず先に行ってみることと，両方が必要だと私は思う．

もう一つ別の計算を見てみよう．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

を示したい．

多項式 $f(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n x = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$ の根と係数の関係から，

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \cdots = -a_1$$

がわかる．これを正弦函数に拡張しようというのだ．

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$$

から，$f(x) = (\sin\sqrt{x})/\sqrt{x}$ を考えると，f の1次の係数は $-1/6$ である．

一方で f の零点は $\pi^2, 2^2\pi^2, 3^2\pi^2, \ldots$ であるから，

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6}$$

となる．

なるほどと思った人は実はだまされている．この議論では，残念ながら，欲しい式が示されたことにはなっていない．どこが足りないのか，考えてみてほしい[3)]．しかし，そこは正確な議論によって埋めることができる．この計算は先に行ってしまった例であるが，本質的に間違っているわけではない．立ち止まって，間を埋めていけばいいのだ．

さて，少し本を紹介したい．まずはきちんとした教科書を購入するなりして手元にいつでもとれるようにしておくことは必要だと思う．普通は，それにあたる本を紹介するべきなのだろうが，ここではそうではなく，副読本をいくつか挙げていきたい．そのような幅の広げ方があると思うからだ．

おもしろい計算の例がたくさん見られるという意味で，参考文献に挙げた1～3)は読んでみると参考になると思う．ここで挙げた後半の例は，(感想も含めて）文献3)からとらせていただいた．

計算の具体例をたくさん見ることで，微積分がいかに強力な道具であるかがわかる．

2. 論理～先人の知恵

自分の経験を，あまり一般化してはいけないとは思うのだが，自分と同じ失敗を繰り返している人がいたら，少し伝えたい気になる．振り返ってみると，数学というのは自分で解答に到達しなくてはいけないのであって，何かから解法を学ぶとか，教わったりしてはいけないのだという意識がどこかにあった気がする．しかし，この意識はどこかで破綻せざるを得ない．考えてみれば明らかだが，先人の知恵を借りるということがなければ，現在のスタンダードにたどりつくまでに，それと同じような歴史を繰り返さなければならない．何百年かけるというのだろうか？

先人の知恵というのを一番実感するのが，証明の組み立てや定義の仕方など，論理構成に関する部分だった．他の人がどうなのかはわからないが，私にとっては，多くの証明問題の解答を先人の知恵によらず自力で構成するなど無理である．歴史的にも，現在の形ができ上がるまで様々な試行錯誤が行われたし，偉大な数学者たちがたくさんの間違いを残している[*2)]．

とくに証明については，先人から学び，先人を真似てみるという姿勢があってもいいと思う．慣れてくると，最初は違和感のあった発想が，だんだんと自然なものに思えてきて，そうして自分のも

---

*2) 厳密な数学の権化のように言われているCauchyにしても，連続函数列の収束先が連続であると述べて，Abelに間違いを指摘されたりしている[4)]．

のになるのだろう．微積分の本を見てみると，数学者の苦闘のあとが結晶のようになって光っている．これらは，芸術作品のようにして鑑賞されるに足るものである．

おなじみの中間値の定理を見てみよう．「区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f は，端点での値 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値をとる」という定理である．

この定理は 17 世紀の後半には認識され，その後の Gauss や Euler も使っていたが，自明のこととされたのか，厳密な証明が必要であると認識され出したのは 19 世紀の初め，Bolzano や Cauchy による考察まで待たなくてはいけない[4]．

教科書でよく取り上げられている証明には，区間縮小法のアイディアで示すものと，実数の有界部分集合の上限の存在に帰着するものがあって，いずれの場合も実数の連続性に帰着させるわけだ．ちなみに，前者は Cauchy の証明に，後者は Bolzano の証明に近い．

証明の概略だけ見てみよう．$f(a) < c < f(b)$ として，$f(d) = c$ を満たす $d \in [a,b]$ の存在を示すわけだ．

区間縮小法による証明というのは，中点 $(a+b)/2$ をとって，$f(\frac{a+b}{2})$ が c より小さければそれより右側の半分の区間 $[(a+b)/2, b]$，大きければ左側の半分を見て，同様の問題を考えるというものだ[*3]．これを続けていくと，区間の幅はどんどんと小さくなり，その中に入っている実数は一つに定まってしまうが[*4]，これが d になる．

もう一つのほうは，実数の有界部分集合には上限が存在する（実数の連続性）という性質を使う．$A = \{x \in [a,b] \mid f(x) < c\}$ という空でない有界部分集合を考えて，その上限をとると d になるというものである（$f(d) < c$ とおいても，$f(d) > c$ とおいても矛盾することがすぐに示される）．

ごく当り前に見える命題を納得するために，相当知恵を絞ったのだろうということが推測できる．歴史的には，まずこのような事実に証明が必要であるという認識が生まれたのが重要な一歩であろう．要因を考えてみるに，19 世紀の数学者の多くは大学に所属していて，それ以前に比べて，人に伝えるとか教えるという行為が重要になってきていたせいのような気がする．私も，大学に勤めて，数学の授業をするようになって，初めて理解できたことがいろいろある．

20 世紀になって，位相の言葉が整理されると，中間値の定理の本質は，連結集合の連続像は連結であるという定理に言い換えられる．そのような現代的扱いについて興味がある人は，文献 5) を見てみるといいかもしれない．ただ，この本はある程度位相について知っている人が，そのような概念構成がされた理由，動機について知りたいときに読む本で，いきなりだと難しいかもしれない．

ところで，論理と言えば，ϵ-δ 論法が学習上の壁として挙げられることが多いが，本当に難しいのはそこではないように思う．ここで象徴的に現れるのは，任意のとか，存在するとかの，いわゆる quantifier（量化子）と呼ばれるものや，記号論理学の利用であろう．しかし，これらは数学の議論における難しい点を明確化するために使われているというぐらいに思ったほうがいい．逆にいえば，哲学的な問題や数学の基礎の問題に向かうのではなく，微積分の問題のために利用するという程度なら，少し記号論理学を勉強するだけで，すぐ慣れてしまえるだろう．慣れていない人は，一度記号論理学を勉強してみるといい．私も，大学初年度の頃，文献 6) のような本を読んでいた気がする．定義されていることの形式的意味や命題の言わんとするところが明確になった後に初めて，先人の素晴らしいアイディアが見えてくる．

3. 例～コレクションを宝箱に

定理を見る．仮定が満たされないときには，定理の結論部分が成り立たないような例を作れるだろうか？ そのような例をたくさん，懐に入れておくといい．これはお守りのようなものだ．

少し例を挙げてみよう．

*3) $f((a+b)/2) = c$ ならば，$d = (a+b)/2$ でよい．

*4) ここで実数の連続性を使っている．

〈不連続函数〉

函数 $f(x) = \sin(1/x)$（$f(0) = 0$ とする）は $x = 0$ で不連続な函数の例としてよくあげられる．これは単に不連続というだけでなく，$\lim_{x \to +0} f(x)$ も $\lim_{x \to -0} f(x)$ もともに存在しない．

これは一点で不連続な例だが，いたるところ不連続な函数の例としては，Dirichlet の函数が有名である．Dirichlet の函数は，有理数に対して 1，無理数に対して 0 を与える函数として定義される．

では，無理数で連続，有理数では不連続になるような函数は作れるだろうか？ 考えてみると面白いだろう．ちなみに，有理数で連続，無理数で不連続であるような函数は存在しないことが証明できる[7]．

〈連続だがいたるところ微分不可能な函数〉

Weierstrass の函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

は連続で，いたるところ微分不可能である．ただし，$0 < a < 1$, b は奇数で $ab > 1 + 3\pi/2$ とする．

同じように連続でいたるところ微分不可能な函数の例として，高木函数も有名だ[8]．

〈超越数〉

円周率 π や，ネピア数 e が超越数であるのを示すのは結構大変である．人工的に超越数を作ってみようと思うと，

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \cdots$$

が超越数であることは比較的簡単にわかる[7]．

〈極小問題に関する例〉

函数 $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ は，原点を通るすべての直線上で，$(0,0)$ を極小点としてもつが，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小とはならない[*5]．これは Peano の例と呼ばれる．

〈積分と極限の順序交換に関する反例〉

函数列 $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2 x + 2n, & 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n \leq x \end{cases}$$

で定義すると，これは $n \to \infty$ で 0 に点収束するが，任意の n について $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ で，

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \to \infty} f_n(x))dx$$

である．

〈累次積分の順序によって値が変わる例〉

累次積分が存在しても，多重積分における広義積分が収束しない例では，積分の順序によって値が変わってしまう場合が考えられる．函数 $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ は，$x = y = 0$ の近傍で有界ではないので，この点を含む多重積分は広義積分を考えなくてはいけないが，これは収束しない．

2 つの変数に関する積分の順序を変えると，累次積分の値が違うことがわかる．

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = \int_0^1 \frac{-dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

最初に挙げた，正規分布の積分の例で，広義積分の収束にこだわりたくなるのは，このような例があるからだ．

有名なもののみだが，いくつか挙げてみた．ここで挙げた例のうちいくつかは，参考文献 7) に詳しい説明を見ることができる．興味があれば，まだまだいろいろな例を見つけることができるだろう．具体例，とくに反例と呼ばれるものは，定理の意味や各仮定の必要性を正しく理解するための大事な材料である．

微積分の歴史においては，それが本質的に極限操作に基づく学問であるがゆえに，しばしば素朴な直感と食い違うことが起こってきた．そして，その忌むべきものとして現れた反例たちが，新し

*5) $y = 3x^2/2$ という曲線上で $x \to 0$ とすると，原点にいくらでも近い点で $f(x,y)$ は負の値をとる．

い理論の突破口となったり，理論を整備していくための試金石となってきたのは間違いない．

4. 物語 ～自分なりの概念構成を試みるということ

物語というと，歴史上のエピソードのことかと思うかもしれないが，ここで書きたいのはそういうことではない．数学においては，定義，定理が次々に並べられる形で述べることが標準的な記述の方法になっているが，その行間を埋めていく作業と言ったらわかってもらえるだろうか？ どのような動機で，そのような概念を考えるのか*6)．平板に見えがちな記述に，意味づけを与えたい．そして次には，それらの動機が，自分自身における動機に重なるようになったらいい．

数学の本を見ていて，定理の羅列に思えてしまったり，つまらなく感じたりするとしたら，物語が見えてこないせいなのかもしれない．

数学の本の内容を，自分の物語に変えていくための手っ取り早い方法は，記述の順番を好みに合わせて入れ替えることかもしれない．あるいは，複数の本から，自分の物語に盛り込む内容を取捨選択することかもしれない．いずれにせよ，何らかのストーリーに沿った配置を考えたいものだ．

微積分という科目においては，大きな物語があって，その問題意識の下にすべてを語りつくすというのは不可能だろう．しかし，小さな物語が数限りなく埋まっていて，様々に関係し合っているというような眺め方はできる．

小さな物語であるほど，物語は人それぞれに違う形で想像できるように思えるが，ここでは私が大学の教養の授業で物語を始める最初の一節を，サンプルとして挙げてみよう．

〈実数論の物語の語り始めの例〉

実数とは何かという問いに対しては，二通りの答え方がある．一つは公理的方法，もう一つは

*6) 歴史的な意味で，その概念の創始者がどう考えていたかという問題も考えてみると面白いのだが，ここではそれは一時無視して，自分なりの物語でいいとしよう．

構成的方法である．

このように話を始めると，自然に疑問が湧き上がってきて物語をやめるわけにはいかなくなる．話を続けると，どちらで答えたとしても，結局は話の順番の問題で，同じ内容を考えなくてはいけなくなることが見えてくる．構成的方法には，Dedekind の切断や，Cauchy 列の同値類など，様々な構成法がある．それぞれの長所，短所が気になる，などなど．

実数に限らず，数をどのように考えるかということに対して，参考文献に挙げた 9) は興味深い物語を記している．是非読んでいただきたい．

〈微分の物語の語り始めの例〉

微分は函数の一次式による近似である．多項式近似を考えると，Taylor 展開を考えることになる．

多変数でもこれは同じで，一次函数は行列を使って表せる．一次函数だと何がいいのか？ いろいろあるだろうが，合成や逆函数が簡単に計算できるなんていうのはどうだろうか？

〈積分の物語の語り始めの例〉

積分は 2 つの全く異なった概念を定式化したものである．一つはある簡単な微分方程式の解，もう一つは面積概念の数学的定式化．微積分学の基本定理というのは，この 2 つが等しいということを言っている．

このように語ると，2 つの概念が統一されたことの利点が見えてくる．一つの方向は，面積が微分方程式の解を使って計算できること．逆の方向に注意すると，そのタイプの微分方程式に関する解の存在定理が，Riemann 積分を使って示されることもわかる．

ここで挙げた例はちょっとしたお遊びだが，微積分学というサーガを自分の言葉で語るとしたらという想像力をもって見直していただけると面白いのではないかと思う．

5. 数学の学びは，螺旋階段を上るように

あれこれと，いい加減なことを書き連ねてきた気がするが，最後は私が学生だった頃に教えていただいた言葉でしめたい．数学の学びは，螺旋階段を上るように．一週目は，結局景色も何も見えなかったし，ただ廻っただけだった．次に来たときも何だか同じところを廻っているだけだ．何週かしたら，いつの間にか，景色が変わっていて，だんだん見通しもきくようになってきた．私の道にもまだまだ上の景色が待っている．

参考文献

1) M. ケッヒャー，訳・長岡昇勇，『数論的古典解析』シュプリンガー・ジャパン (1996).
2) 寺澤順，『π と微積分の 23 話』日本評論社 (2006).
3) 野海正俊，『オイラーに学ぶ』日本評論社 (2007).
4) U. ボタチーニ，訳・好田順治，『解析学の歴史』現代数学社 (1990).
5) 森毅，『位相のこころ』ちくま学芸文庫 (2006).
6) 石谷茂，『ϵ-δ に泣く／∀ と ∃ に泣く』現代数学社 (1990).
7) W. ダンハム，訳・一樂重雄，實川敏明，『微積分名作ギャラリー』日本評論社 (2009).
8) 高木貞治，『定本　解析概論』岩波書店 (2010).
9) H.-D. エビングハウス他，訳・成木勇夫，『数（上・下）』シュプリンガー・ジャパン (1991).

（さかい・ひでたか，東京大学大学院数理科学研究科）

線型空間，線型写像と表現行列

岡田 聡一

1. はじめに

大学の理科系に入学した学生の多くは，1 年次に微分積分学と線型代数学（大学によって科目名は様々であるが）を学習する．線型代数学とは文字通り「線型性」を扱う「代数学」である．ここでの「線型性」とは，小学校以来おなじみの「比例関係」から量子力学などにおける「重ね合わせの原理」まで，対象の数量関係を記述する際に頻繁に現れる基本概念である．

1 年次に学習する線型代数学の目標は，

A. 行列に関する計算技術を習得すること．

B. その背景にある線型空間，線型写像などの概念，考え方を理解すること．

の 2 つにあると言ってよい．例えば行列の対角化では，与えられた行列の対角化を計算する方法を習得することが目標 A であり，なぜその方法で対角化ができるのかを理解することが目標 B である．目標 A における行列に関する計算は具体的であり，多くの場合アルゴリズム化されているので，学生が難しく感じることは少ない．一方，目標 B では，高校数学とは違った抽象的な概念などがメインとなるため，学生が戸惑うことが少なくない．

ここでは，差分方程式（漸化式）と微分方程式を例にとって，目標 B のキーポイントである線型空間，基底，線型写像，表現行列などを概観する．

2. 差分方程式と微分方程式

次の 2 つの問題を考えよう．

問題 1 実数列 $\{x_n\} = \{x_0, x_1, \cdots\}$ に関する次の差分方程式（漸化式）を解け．

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0 \quad (n \geq 0) \quad (1)$$

問題 2 実数全体で定義された実数値関数 $x(t)$ に関する次の微分方程式を解け．

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

ここで，$x'(t)$, $x''(t)$ はそれぞれ $x(t)$ の 1 階，2 階の導関数である．

答えを書いてしまうと，方程式 (1), (2) の係数からできる 2 次方程式

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad (3)$$

（**特性方程式**と言う）の解 $x = -3, 2$ を用いて，(1) の解は

$$x_n = \alpha \cdot (-3)^n + \beta \cdot 2^n \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

の形に表され，(2) の解は

$$x(t) = \alpha \cdot e^{-3t} + \beta \cdot e^{2t} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

の形に表される．

それでは，線型代数学の視点から，この解がどのようにして得られたのか？ また，解の表示が似ているのはなぜか？ などについて，説明していこう．

■ 3. 線型空間 ■

問題 1, 2 において，個別の解を扱うのではなく，解全体のなす集合を考えその構造を調べるというのが，現代数学の一つの考え方である．差分方程式 (1) をみたす実数列全体のなす集合

$$V_{差分} = \{\{x_n\} : x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0\}$$

と，微分方程式 (2) をみたす実数値関数全体のなす集合

$$V_{微分} = \{x(t) : x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 0\}$$

を考える．これらの集合 $V_{差分}$ と $V_{微分}$ は，単に数列や関数の集合であるという以上に，「和」と「スカラー倍」という構造をもっている．実数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ と実数 α に対して，数列の和 $\{x_n\}+\{y_n\}$ とスカラー倍 $\alpha\{x_n\}$ は，それぞれ $x_n+y_n, \alpha x_n$ を第 n 項とする数列として定義される：

$$\{x_n\}+\{y_n\} = \{x_n+y_n\}, \quad \alpha\{x_n\} = \{\alpha x_n\}.$$

このとき，$\{x_n\}, \{y_n\} \in V_{差分}$ ならば，$\{x_n\} + \{y_n\}, \alpha\{x_n\} \in V_{差分}$ となる．同様に，実数値関数 $x(t), y(t)$ と実数 α に対して，関数の和 $(x+y)(t)$ とスカラー倍 $(\alpha x)(t)$ を

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

によって定義する[*1)]と，$x(t), y(t) \in V_{微分}$ ならば，$(x+y)(t), (\alpha x)(t) \in V_{微分}$ となる．

このような「和」と「スカラー倍」の構造をもつものは他にも数多くある．典型的な例は平面のベクトル全体，空間のベクトル全体や，実数を成分とする縦ベクトルの全体

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

であるが，実数を成分とする $m \times n$ 行列の全体，区間 I 上で定義された実数値関数の全体，無限階微分可能な実数値関数全体なども「和」と「スカラー倍」の構造をもっている．このような対象を統一的に扱う枠組みが線型空間である．

定義 3　集合 V に，2 つの算法
- V の 2 つの元 v, w に V の元 $v+w$ を対応させる**和**,
- 実数 α と V の元 v に V の元 αv を対応させる**スカラー倍**

が与えられていて，8 つの性質 (線型空間の公理)

(i) $(u+v)+w = u+(v+w)$ $(u, v, w \in V)$,

(ii) $v+w = w+v$ $(v, w \in V)$,

(iii) $v+0 = 0+v = v$ $(v \in V)$ となる $0 \in V$ が存在する,

(iv) 各 $v \in V$ に対して，$v+(-v) = (-v)+v = 0$ となる $-v \in V$ が存在する,

(v) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in V)$,

(vi) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in V)$,

(vii) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$ $(\alpha \in \mathbb{R}, v, w \in V)$,

(viii) $1v = v$ $(v \in V)$

が成り立っているとき，V は (実) **線型空間** (ベクトル空間とも言う) であると言う．

上で定義した $V_{差分}, V_{微分}$ における和，スカラー倍は，この定義の性質をみたしている．よって，$V_{差分}, V_{微分}$ は線型空間である．また，平面のベクトル全体，空間のベクトル全体や，$\mathbb{R}^n$ (数ベクトル空間という) などはいずれも線型空間となっている．

線型空間の定義は数学で初めて出会う本格的な「定義」の一つであり，このような抽象的な定義をすぐに理解できないのも当然である．「定義」は「ゲームのルール」のようなものであり，ゲームを進めていくうちにその意味や使い方が徐々にわかってくるものなのである．数学で「定義」に出会ったときには，

- 定義のもとになっているモデル例 (線型空間の場合は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$) が何であるかを把握する,
- 具体的な例 (線型空間の場合は行列や関数のなす線型空間) で定義の条件を確認する,

---

*1)　正確には，x が関数を表す記号であり，$x(t)$ は関数 x の t における値だから，本来両者は区別すべきものである．この定義では，新しい関数 $x+y, \alpha x$ の t における値を上式で定めているのである．

● モデル例などの具体例では明らかと思えるような性質（線型空間の場合は例えば $(-1)v = -v$ など）を定義に基づいて証明する，

などを試みると，その定義の意味や使い方がわかってくるであろう．

4. 線型写像

微分方程式 (2) は未知関数 $x(t)$ とその導関数 $x'(t), x''(t)$ に関する方程式だから，関数 $x(t)$ にその導関数 $x'(t)$ を対応させる写像（微分作用素）を考えるのは自然である．今考えている微分方程式 (2) の解空間 $V_{微分}$ では，$x(t) \in V_{微分}$ のとき $x'(t) \in V_{微分}$ であり，写像

$$D : V_{微分} \longrightarrow V_{微分} \quad D(x(t)) = x'(t)$$

が定まる．また，この微分作用素 D は $V_{微分}$ の線型空間の構造（和とスカラー倍）を保っている．つまり，$x(t), y(t) \in V_{微分}$ と実数 α に対して，

$$D((x+y)(t)) = D(x(t)) + D(y(t)),$$
$$D((\alpha x)(t)) = \alpha D(x(t))$$

が成り立っている．

差分方程式 (1) は数列の項の間の関係式に見えるが，数列 $\{x_n\}$ の項をずらしてできる数列 $\{x_{n+1}\} = \{x_1, x_2, \cdots\}$, $\{x_{n+2}\} = \{x_2, x_3, \cdots\}$ を考えると，(1) はこれらの数列の間の関係式

$$\{x_{n+2}\} + \{x_{n+1}\} - 6\{x_n\} = 0$$

（ここで，右辺の 0 はすべての項が 0 である数列である）に他ならない．数列 $\{x_n\}$ に $\{x_{n+1}\}$ を対応させる写像を考えると，$\{x_n\} \in V_{差分}$ のとき $\{x_{n+1}\} \in V_{差分}$ であり，写像

$$S : V_{差分} \longrightarrow V_{差分} \quad S(\{x_n\}) = \{x_{n+1}\}$$

が定まり，

$$S(\{x_n\} + \{y_n\}) = S(\{x_n\}) + S(\{y_n\}),$$
$$S(\alpha\{x_n\}) = \alpha S(\{x_n\})$$

が成り立っている．

このように，線型空間の構造（和とスカラー倍）を保つ写像が「線型写像」である．

定義 4　V, W を線型空間とする．写像 $F : V \longrightarrow W$ は，2 つの条件

(i)　$F(v_1+v_2) = F(v_1)+F(v_2) \quad (v_1, v_2 \in V)$,

(ii)　$F(\alpha v) = \alpha F(v) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, v \in V)$

をみたすとき，**線型写像**であると言う．また，線型写像 F が全単射にもなっているとき，F は**同型写像**であると言う．

上で考えた項のずらし $S : V_{差分} \longrightarrow V_{差分}$ や微分作用素 $D : V_{微分} \longrightarrow V_{微分}$ はいずれも，上の定義の条件をみたし，線型写像となっている．

線型写像の最も基本的な例は，行列の掛け算によって与えられるものである．つまり，$m \times n$ 行列 A に対して，数ベクトル空間の間の写像 $F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$F_A(v) = Av \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

によって定義すると，F_A は線型写像である．実は，あとで述べる表現行列を用いると，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像はすべてこの形をしていることが示される．

5. 基底

差分方程式 (1) をみたす数列 $\{x_n\}$ では，x_0 と x_1 から $x_2, x_3, \cdots$ が

$$x_2 = -x_1 + 6x_0, \quad x_3 = -x_2 + 6x_1, \quad \cdots$$

と順に一意的に定まっていく．そこで，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in V_{差分}$ を条件

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

によって定めることができる．差分方程式 (1) の解 $\{x_n\} \in V_{差分}$ が与えられたとき，数列 $\{y_n\} = x_0\{a_n\} + x_1\{b_n\}$ を考えると，$\{y_n\} \in V_{差分}$ であり，$y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$ だから，数列として $\{y_n\}$ は $\{x_n\}$ に一致しなければならない．つまり，

$$\{x_n\} = x_0\{a_n\} + x_1\{b_n\}$$

と一意的に表される．

同様に，微分方程式の一般論で，微分方程式 (2) をみたす関数 $x(t)$ は，$x(0)$, $x'(0)$ を与えることによって一意的に定まることが知られている．そ

こで，関数 $a(t), b(t) \in V_{微分}$ を条件

$$a(0)=1, \quad a'(0)=0, \quad b(0)=0, \quad b'(0)=1$$

によって定義することができ，微分方程式 (2) の解 $x(t) \in V_{微分}$ は

$$x(t) = x(0)a(t) + x'(0)b(t)$$

と一意的に表される．

従って，$V_{差分}$ のすべての元は $(\{a_n\}, \{b_n\})$ から，$V_{微分}$ のすべての元は $(a(t), b(t))$ から，スカラー倍と和を用いて一意的に組み立てられている．この状況を抽象化したのが「線型結合」,「基底」の概念である．

定義 5 V を線型空間とし，$v_1, \cdots, v_n \in V$ とする．$v \in V$ は，

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R})$$

の形に表されるとき，$v_1, \cdots, v_n$ の**線型結合**であると言う．さらに，任意の $v \in V$ が $v_1, \cdots, v_n$ の線型結合として一意的に表されるとき，ベクトルの組 $(v_1, \cdots, v_n)$ は V の**基底**であると言い，ベクトルの個数 n を V の**次元**と呼ぶ．そして，$\dim V = n$ と表す．

最も基本的な線型空間である数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ では，n 個の単位ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の組 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ が一つの基底（これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底と言う）になっている．よって，$\dim \mathbb{R}^n = n$ である．

線型空間において基底を考える第 1 のメリットは，線型空間に「座標」が導入でき，線型空間のモデルである $\mathbb{R}^n$ との同一視が可能になることである．一般の線型空間 V では，数ベクトル空間の標準基底のような「標準的」な基底があるとは限らない．しかし，V に基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ が与えられると，同型写像

$$V \ni \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

が定まり，この同型写像によって，線型空間として V はより具体的な $\mathbb{R}^n$ と同一視され，V における議論を $\mathbb{R}^n$ における議論に帰着することができる．

差分方程式と微分方程式の例に戻ると，上で定義した数列の組 $(\{a_n\}, \{b_n\})$ は $V_{差分}$ の一つの基底であり，関数の組 $(\{a(t), b(t)\})$ は $V_{微分}$ の一つの基底である．よって，

$$\dim V_{差分} = \dim V_{微分} = 2$$

であり，

$$V_{差分} \ni \{x_n\} \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$V_{微分} \ni x(t) \longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

はいずれも同型写像である．つまり，$V_{差分}$ と $V_{微分}$ は線型空間としてはどちらも $\mathbb{R}^2$ と同じ構造をもっている．ここに，差分方程式 (1) と微分方程式 (2) の類似性が現れている．

■ 6. 線型写像の表現行列 ■

一般に集合 X から集合 Y への写像 $f : X \longrightarrow Y$ を与えるためには，各 $x \in X$ に対してその行先 $f(x)$ を指定しなければならない．しかし，線型空間の間の線型写像 $F : V \longrightarrow W$ では，基底の行先を指定すれば十分である．これが，線型空間において基底を考える第 2 のメリットである．

線型空間 V が基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ をもつとき，V の任意の元 $v \in V$ は，$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R})$ と表されるから，

$$F(v) = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n)$$

となる．よって，基底の行先 $F(v_1), \cdots, F(v_n)$ がわかれば，一般の $v \in V$ の行先 $F(v)$ もわかる．さらに，W も基底 $(w_1, \cdots, w_m)$ をもつときは，各 $F(v_j)$ を $w_1, \cdots, w_m$ の線型結合として表したときの係数がわかればよいから，mn 個の実数で線型写像 F が「表現」されることになる．

定義 6 V, W を線型空間とし，$(v_1, \cdots, v_n)$, $(w_1, \cdots, w_m)$ をそれぞれ V, W の基底とする．線型写像 $F: V \longrightarrow W$ に対して，

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

によって定まる mn 個の実数 a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ を並べてできる*2) $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ を，F の基底 $(v_1, \cdots, v_n)$, $(w_1, \cdots, w_m)$ に関する**表現行列**と言う．

例えば，$m \times n$ 行列 A の定める線型写像 $F_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ の標準基底に関する表現行列は A そのもの*3)である．

項をずらす線型写像 $S: V_{差分} \longrightarrow V_{差分}$ の表現行列を求める．$\{c_n\} = S(\{a_n\})$, $\{d_n\} = S(\{b_n\})$ とおくと，

$$c_0 = a_1 = 0, \quad c_1 = a_2 = 6,$$

$$d_0 = b_1 = 1, \quad d_1 = b_2 = -1$$

だから，

$$S(\{a_n\}) = 6\{b_n\}, \quad S(\{b_n\}) = \{a_n\} - \{b_n\}$$

となる．よって，S の基底 $(\{a_n\}, \{b_n\})$ に関する表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

である．同様にして計算すると，微分作用素 $D: V_{微分} \longrightarrow V_{微分}$ の基底 $(a(t), b(t))$ に関する表現行列も，同じ A となる．これも差分方程式 (1) と微分方程式 (2) の類似性の現れである．

この表現行列 A は，関係式

$$A^2 + A - 6E_2 = O_2 \tag{4}$$

をみたしている．ここで，

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ単位行列，零行列である．この関係式 (4) にもとの方程式 (1), (2) と同じ係数が現れたのは偶然ではない．それは，表現行列をとることにより，線型写像の和，スカラー倍，合成がそれぞれ行列の和，スカラー倍，積に対応しているからである．

線型空間 V, W の間の線型写像 $F, G: V \longrightarrow W$ と実数 α が与えられたとき，写像 $F+G$, $\alpha F: V \longrightarrow W$ を

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v), \quad (\alpha F)(v) = \alpha F(v)$$

$(v \in V)$ によって定義すると，$F+G$, αF はともに線型写像となる．V が基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ をもち，W が基底 $(w_1, \cdots, w_m)$ をもつとき，F, G のこれらの基底に関する表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とすると，

$$F+G \text{ の表現行列} = A + B,$$

$$\alpha F \text{ の表現行列} = \alpha A$$

となる．

3 つの線型空間 U, V, W とその間の線型写像 $G: U \longrightarrow V$ と $F: V \longrightarrow W$ が与えられたとき，合成写像 $F \circ G: U \longrightarrow W$ も線型写像である：

$$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W.$$

ここで，$(u_1, \cdots, u_l)$ が U の基底，$(v_1, \cdots, v_n)$ が V の基底，$(w_1, \cdots, w_m)$ が W の基底であるとし，これらの基底に関する F, G の表現行列がそれぞれ A, B であるとする．このとき，

$$(F \circ G)(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) w_i$$

となるから，$F \circ G$ の基底 $(u_1, \cdots, u_l)$, $(w_1, \cdots, w_m)$ に関する表現行列の (i, j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

であり，これは行列の積 AB の (i, j) 成分に他ならない．よって，

$$F \circ G \text{ の表現行列} = AB$$

である．表現行列を考えることで，行列の積の定

---

*2) あとで説明するように線型写像の合成と行列の積が対応するように，$F(v_j)$ の係数 $a_{1j}, \cdots, a_{mj}$ を縦に並べて列ベクトルを作り，それらを並べて $m \times n$ 行列を構成する．

*3) しかし，基底のとり方は 1 通りとは限らず，基底の取り方によって表現行列も変化する．そこで，数ベクトル空間の場合でも，線型写像 F_A の表現行列が簡単な形になるように基底をうまく取り換えることが，行列 A の性質を調べる際にも重要になる．これが，対角化，Jordan 標準形などの「標準形」の理論の根底にある考え方である．

義が自然なものであることがわかる．

差分方程式の例に戻ると，差分方程式 (1) は

$$(S \circ S + S - 6I)(\{x_n\}) = 0$$

（ここで，I は $\{x_n\}$ に $\{x_n\}$ を対応させる $V_{差分}$ 上の恒等変換である）と書き直すことができるから，線型写像の間の関係式

$$S \circ S + S - 6I = O$$

が成り立つ．この両辺の表現行列を考えると，S の表現行列 A に関する関係式 (4) が（行列の計算をしなくても）得られる．

■ 7. 固有値，固有ベクトル ■

すでにみたように，差分方程式 (1) の解は，$a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ をみたす数列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in V_{差分}$ を用いて，

$$\{x_n\} = \alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

の形に表される．これで $V_{差分}$ の線型空間の構造はわかったが，a_n, b_n がどのように n を用いて表されるのかは全く不明であり，この表示では差分方程式 (1) を「解いた」ことにはならない．$\{x_n\} \in V_{差分}$ の一般項 x_n を n を用いて具体的に表す必要がある．そのためには，「固有値」，「固有ベクトル」の概念が有用である．

定義 7 V を線型空間，$F : V \longrightarrow V$ を線型写像とする．0 でない元 $v \in V$ が，ある実数 λ に対して，

$$F(v) = \lambda v$$

をみたしているとき，v を**固有値** λ をもつ F の**固有ベクトル**と言う．

実数列 $\{x_n\}$ が，項をずらす線型写像 S に対して $S(\{x_n\}) = \lambda\{x_n\}$ をみたしている，つまり，$x_{n+1} = \lambda x_n$ $(n \geq 0)$ であるとすると，数列 $\{x_n\}$ は λ を公比とする等比数列であり，$\{\lambda^n\}$ のスカラー倍である．等比数列 $\{\lambda^n\}$ が差分方程式 (1) をみたす条件は，

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

であり，これは特性方程式 (3) に他ならない．

特性方程式 (3) の解が $x = -3, 2$ だから，等比数列 $\{p_n\} = \{(-3)^n\}$, $\{q_n\} = \{2^n\}$ は $V_{差分}$ に含まれる．さらに，$(\{p_n\}, \{q_n\})$ は $V_{差分}$ の基底となる，つまり，差分方程式 (1) の解 $\{x_n\}$ は，

$$\{x_n\} = \alpha\{(-3)^n\} + \beta\{2^n\} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

の形に一意的に表されることがわかる．実際，α, β は

$$\alpha = \frac{2x_0 - x_1}{5}, \quad \beta = \frac{3x_0 + x_1}{5}$$

で与えられる．

同様に，実数値関数 $x(t)$ が微分作用素 D に対して $D(x(t)) = \lambda x(t)$，つまり，$x'(t) = \lambda x(t)$ をみたしているとすると，$x(t)$ は指数関数 $e^{\lambda t}$ のスカラー倍でなければならない*4)．指数関数 $e^{\lambda t}$ が微分方程式 (2) をみたす条件も，

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

であり，$p(t) = e^{-3t}$, $q(t) = e^{2t}$ が $V_{微分}$ に含まれる．また，$(p(t), q(t))$ が $V_{微分}$ の基底となる，つまり，微分方程式 (2) の解 $x(t)$ が

$$x(t) = \alpha e^{-3t} + \beta e^{2t} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

の形に一意的に表されることがわかる．実際，α, β は

$$\alpha = \frac{2x(0) - x'(0)}{5}, \quad \beta = \frac{3x(0) + x'(0)}{5}$$

で与えられる．

ここまで，差分方程式，微分方程式を例にとって，線型空間などの線型代数学のいくつかの概念を駆け足で説明してきたが，これらの概念に多少とも親しみがもてただろうか．線型代数学の概念に戸惑いを感じたときは，説明の詳しい分厚い教科書[1,2]を見ながら，自分で手を動かし考えてみることをすすめる．

*4) $y(t) = x(t)e^{-\lambda t}$ を考えると，$y'(t) = 0$ となるから，$y(t)$ は定数関数でなければならず，$x(t)$ は $e^{\lambda t}$ のスカラー倍となる．

参考文献

1) 長谷川浩司，『線型代数—Linear Algebra』，日本評論社，2004.
2) 長岡亮介，『線型代数入門講義—現代数学の《技法》と《心》』，東京図書，2010.

（おかだ・そういち，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

ベクトル解析

微積分の進化

森田 茂之

1. はじめに

ベクトル解析（vector analysis）とは，3 次元ユークリッド空間内において定義された関数やベクトル値関数により記述される現象を，微分と積分により調べる理論と言える．もともとは，電磁気学や流体力学における物理法則を，統一的に記述するために建設されたものである．ここでは，電荷密度や圧力は通常の関数であるのに対し，電場・磁場・流体の速度ベクトル等は 3 次元のベクトル値関数（ベクトル場と呼ばれる）として記述される．

しかし，物理学的な意味をひとまず忘れて，数学的に単純化して見れば次のように言うことができる．微積分学の基本定理を思い出そう：

定理 1（微積分学の基本定理） 実数直線上の有界閉区間 $[a,b]$ で定義された，C^1 級関数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して，等式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

が成立する．

ベクトル解析とは，この基本定理を，2 次元や 3 次元のユークリッド空間（$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$），あるいはそれらの中の曲線・曲面・立体等に一般化して得られる理論と言うことができる．

この後者の立場からすれば，いまでは 2, 3 次元のユークリッド空間に限らず，一般の次元のしかも曲がった図形（多様体と呼ばれる）に対して成立する理論として整備されている．

このように大きく発展した理論への入門として，ベクトル解析は極めて重要である．学習の際の心構えとしては，まず関数やベクトル場に働く種々の演算の表示と幾何学的・物理学的意味に慣れ，効率よく計算する力を習得することが大切である．他方，とくに数学的には，真直ぐな空間としてのユークリッド空間から自立して，どのようにして一般の多様体上で理論を展開していけるのか，という理論的側面をもバランス良く理解するのが重要であろう．

2. 線積分とグリーンの定理

まず，$\mathbb{R}$ 上の区間を舞台とする定理 1 を，$\mathbb{R}^2$ 上の曲線（平面曲線と言う），あるいは $\mathbb{R}^3$ 内の曲線（空間曲線と言う）に対して一般化しよう．図 1 にあるような向き付けられた曲線 C を考える．C は区分的に滑らか，すなわち有限個の点を除いて微分可能な関数によるパラメータ表示

$$C = \{(u(t), v(t)); t \in [a,b]\}$$

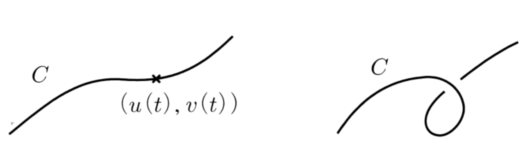


図 1 平面曲線と空間曲線．

を持つものとする．ここでは平面曲線の場合のみを記すが，空間曲線の場合も z 座標が増えるだけで同様である．さて C の近傍 U で定義された連続関数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，**線積分**（curvilinear integral）

$$\int_C f ds, \quad \int_C f dx, \quad \int_C f dy \tag{1}$$

が次のように定義される．すなわち区間 $[a, b]$ を $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ と細分し

$$\int_C f ds = \lim_{\delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, l_i \quad (\delta_i = t_i - t_{i-1})$$

とおくのである．ただし $P_i = (u(t_i), v(t_i))$ であり，また l_i は線分 $\overline{P_{i-1}P_i}$ の長さである．また (1) の後ろ 2 つの線積分は，上記において l_i を，それぞれ $u(t_i) - u(t_{i-1}), v(t_i) - v(t_{i-1})$ と置き換えて定義される．これらの線積分は t に関する通常の 1 次元の積分により

$$\int_C f ds = \int_a^b f(u(t), v(t)) \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}\, dt,$$
$$\int_C f dx = \int_a^b f(u(t), v(t)) u'(t)\, dt,$$
$$\int_C f dy = \int_a^b f(u(t), v(t)) v'(t)\, dt$$

と表示できることが分かる．C が空間曲線の場合も同様である．

定義からすぐに分かることは，恒等的に 1 を値に持つ関数の C 上の線積分 $\int_C ds$（$\int_C 1ds$ の替わりにこのように表示する）は，C の長さに等しいということである．また，$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級関数のときには，$df = f_x dx + f_y dy$ とおきこれを f の微分と呼ぶ（全微分と言う場合も多い）．このとき，合成関数の微分と上記 $\int_C dx, \int_C dy$ についての公式から

$$\begin{aligned}\int_C df &= \int_C f_x dx + f_y dy \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f(u(t), v(t)) dt \\ &= f(P_n) - f(P_0)\end{aligned}$$

という式が得られる．ここで最後の等式は，定理 1 を適用して得られる．このようにして，定理 1 の平面曲線や空間曲線の場合への拡張が得られた．

とくに C が閉曲線，すなわち $P_n = P_0$ の場合は $\int_C df = 0$ となる．ここで関数 f の微分 $df = f_x dx + f_y dy$ を

$$\omega = f dx + g dy \tag{2}$$

という一般の形のもので置き換えればどうなるか，を考えるのは自然であろう．式 (2) の形をしたものを 1 次**微分形式**（differential form）と言う．略して 1 **形式**（1-form）という場合が多い．関数の微分は特別な形をした 1 形式である．

平面上の自己交叉のない閉曲線 C を単純閉曲線と言う．C は円板と同相な区域 D の境界となることが知られている（ジョルダンの曲線定理）．これを $\partial D = C$ と表す．このような状況において，D の近傍で定義された一般の 1 形式 ω の C 上の線積分を，D 上の重積分で表したものが次のグリーンの定理である．これは定理 1 の 2 次元への一般化と考えることができる．

定理 2（**グリーンの定理**）$C \subset \mathbb{R}^2$ を平面上の向き付けられた区分的に滑らかな単純閉曲線とし，D を C で囲まれた区域とする．また，$U \subset \mathbb{R}^2$ を D を含む開集合とし，$f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を U 上定義された任意の 2 つの C^1 級関数とする（図 2 参照）．このとき，等式

$$\iint_D (-f_y + g_x) dxdy = \int_C f dx + g dy$$

が成立する．

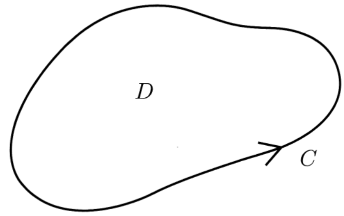


図 2　グリーンの定理．

3. 関数（スカラー場）とベクトル場

高校で学ぶ $\mathbb{R}$ 上の通常の実数値関数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ は $y=f(x)$ とも表記される．これを一般化するものとして，大学初年次には $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $z=f(x,y)$, $\mathbb{R}^3$ 上の 3 変数関数 $w=f(x,y,z)$, そして一般に $\mathbb{R}^n$ 上の n 変数関数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ を扱い，偏微分あるいは重積分の理論を学ぶ．理系の場合は，これをさらに一般化したベクトル値の関数 $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ とその微分も学ぶ．

ベクトル場 (vector field) とは，ベクトル値関数の特別の場合とみなすことができる．しかし，それ自身極めて重要な概念である．簡単のため，まず $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場の定義を述べる．

定義 3　$U\subset\mathbb{R}^2$ を開集合とする．U 上の各点 $p\in U$ において p を始点とする 2 次元ベクトル $X(p)\in\mathbb{R}^2$ が与えられているとする．このとき X を U 上のベクトル場と言う（図 3 参照）．$X(p)$ の x 成分, y 成分をそれぞれ $f(p), g(p)$ とすれば，f,g は U 上の実数値関数となる．f,g がいずれも C^∞ 級であるとき，X を C^∞ 級のベクトル場と言う．

逆に 2 つの C^∞ 級の関数 $f,g:U\longrightarrow\mathbb{R}$ が与えられれば，$X=(f,g)$ は U 上の C^∞ 級のベクトル場となる．したがって，U 上のベクトル場と，U 上の 2 次元ベクトル値関数とは互いに等価な概念である．上記の定義を $\mathbb{R}^3$ の場合や，一般に $\mathbb{R}^n$ の場合に拡張するのは容易であろう．

実は，ベクトル場は曲がった図形である多様体に対しても定義することができる．しかしこの場合，一般にはベクトル値関数とは異なる概念となるのである．

ベクトル場と区別するために，通常の関数をスカラー場 (scalar field) という場合がある．

最も重要なベクトル場は，関数 f に伴って表れる勾配ベクトル場と呼ばれるもので，次のように定義される．

定義 4　$U\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．このとき

$$\mathrm{grad}\, f=(f_{x_1},\cdots,f_{x_n})$$

とおけば，これは U 上の C^∞ 級ベクトル場となる．これを f の**勾配ベクトル場** (gradient vector field) と言う．

定義の意味を考えよう．$\mathrm{grad}\, f$ の各成分は，その方向の偏微分すなわちその方向の関数の増大度を表す．実際，U 上の各点 p におけるベクトル $\mathrm{grad}\, f(p)$ は，その点の近くで f の値が最も増大する方向を向き，その最大の増加率を長さに持つベクトルである．このことを幾何学的に表すと次のようになる．簡単のために 2 次元の場合を述べると，f のグラフ $\Gamma(f)$ とは

$$\Gamma(f)=\{(x,y,f(x,y));(x,y)\in U\}\ \subset\mathbb{R}^3$$

により定義される $\mathbb{R}^3$ の中の曲面である (図 4 (a))．この曲面の xy 平面 $\mathbb{R}^2$ からの高さは関数 f の値そのものであるから，$\Gamma(f)$ の形状は f の増減をそのまま反映したものになる．実際，$\Gamma(f)$ 上に雨が降ったとし，雨水の流れをベクトルで表したものを $\mathbb{R}^2$ に正射影したものは，$-\mathrm{grad}\, f$ に他ならないのである（図 4 (b) 参照）．

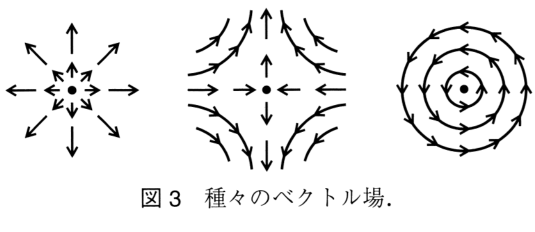


図 3　種々のベクトル場.

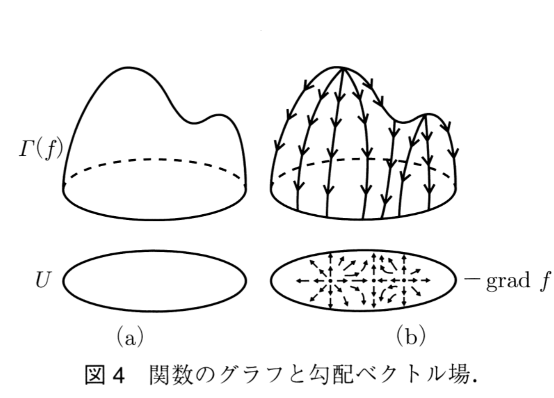


図 4　関数のグラフと勾配ベクトル場.

4. スカラー場とベクトル場に働く微分作用素

前の項で関数 f の勾配 $\mathrm{grad}\, f$ を定義した．$\mathrm{grad}\, f$ の各成分は f に偏微分という操作を施して得られるものである．このような操作を一般に**微分作用素**（differential operator）と言う．ベクトル解析の技術的なポイントは，関数やベクトル場に作用するいろいろな微分作用素を考え，それらの相互関係により種々の現象を記述するというものである．勾配に加えて重要な微分作用素の定義を述べる．

まず $U \subset \mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $X = (f_1, \cdots, f_n)$ に対し

$$\mathrm{div}\, X = (f_1)_{x_1} + \cdots + (f_n)_{x_n}$$

とおき，これを**発散**（divergence）と言う．発散とは，X が流体の流れを記述しているとすれば，その流れを維持するのに必要な各点での湧き出し量（負の場合は吸い込み量）を表すものである．

次に 3 次元ベクトル場 $X = (f, g, h)$ に対して

$$\mathrm{rot}\, X = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$$

とおき，これを X の**回転**（rotation）と言う（$\mathrm{curl}\, X$ と表す場合もある）．これは 3 次元に特有の微分作用素である．X が流体の流れを記述しているとすれば，$\mathrm{rot}\, X$ はその渦の様子を表すベクトル場である．

ここで，微分作用素を成分とするベクトル

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

を導入すれば

$$\mathrm{grad}\, f = f_{x_1} + \cdots + f_{x_n} = \nabla f$$

$$\mathrm{div}\, X = (f_1)_{x_1} + \cdots + (f_n)_{x_n} = \nabla \cdot X$$

（$\cdot$ は内積）

$$\mathrm{rot}\, X = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y) = \nabla \times X$$

（$\times$ は外積あるいはベクトル積）

と簡明に記述できる．

これらの演算の間には，いくつもの有名な公式がある．典型的な 2 つの例をあげる．

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0 \quad (\text{勾配は渦なし}),$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X = 0 \quad (\text{回転は湧き出しなし})$$

これらは，物理学的にも理解しやすい等式と言えよう．証明もそれほど難しくないので，確かめてみるとよいだろう．

最後に，関数 f に対し

$$\triangle f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

とおき，これを f の**ラプラシアン**（Laplacian）と言う．この微分作用素は，数学および物理学において極めて重要な役割を果たす．$\triangle f = 0$ となる関数を**調和関数**（harmonic function）と言う．読者は，例えば 2 変数の多項式 $f(x, y)$ で調和関数となるものをすべて求める等，実際の計算をする中から感覚を養うようにするとよいだろう．

5. 面積分とガウスの定理，ストークスの定理

グリーンの定理 2 を 2 通りの仕方で 3 次元に拡張して得られるのが，次に述べるガウスの定理およびストークスの定理である．ここでは，線積分を 2 次元に拡張した面積分の概念が使われる．

面積分について簡単に復習しよう．図 5 にあるような向き付けられた曲面 S を考える．S は滑らか，すなわち各点の回りで C^∞ 級の 2 変数関数のグラフの形をしているとする．さて S の近傍 U で定義された連続関数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，**面積分**（surface integral）

$$\iint_S f d\sigma, \quad \iint_S f dx dy,$$

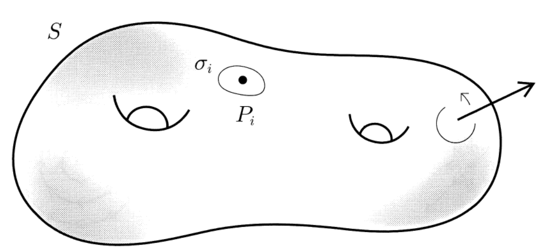


図 5　空間内の曲面．

$$\iint_S f dydz, \quad \int_S f dzdx \tag{3}$$

が次のように定義される．すなわち S を小区域 σ_i $(i = 1, \cdots, k)$ に分割し

$$\iint_S f d\sigma = \lim_{|\sigma_i| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(P_i)\,\mathrm{Area}\,\sigma'_i$$

とおくのである．ただし P_i は σ_i 上の点，$|\sigma_i|$ は σ_i の直径（2 点間の距離の最大値），また $\mathrm{Area}\,\sigma'_i$ は σ_i を P_i における接平面に正射影した像 σ'_i の面積を表す．また (3) の後ろ 3 つの面積分は，上記において $\mathrm{Area}\,\sigma'_i$ を，それぞれ $\mathbb{R}^3$ 内の xy, yz, zx 平面に正射影した像の（符号つき）面積を表す．

こう書いてくると，面積分は線積分という 1 次元の概念を単に 2 次元に拡張したもの，と思われるかも知れない．結局はそう言えるのだが，一点極めて重要な注意点がある．それは上記の定義の中で，P_i における接平面に正射影した像 σ'_i の面積が使われているところである．線積分の定義をそのままの形で拡張するとすれば，曲面上にたくさんの点を取り，それらを適宜線分で結んで小さな三角形を描けば，それらが曲面を近似するように思えるかも知れない．もしこれが正しければ，面積分の定義において，これらの小さな三角形の面積を使うことができることになる．しかし，実はそうではないことが知られている．詳細は文献 1) を参照してほしい．

次の定理は，線積分の替わりに面積分を使うことにより，グリーンの定理を 3 次元に拡張したものと言える．

定理 5（ガウスの定理） $S \subset \mathbb{R}^3$ を空間内の向き付けられた閉曲面とし，D を S で囲まれた区域とする．また，$U \subset \mathbb{R}^2$ を D を含む開集合とし，$f, g, h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を U 上定義された任意の 3 つの C^1 級関数とする（図 6 (a) 参照）．このとき，等式

$$\iiint_D (f_x + g_y + h_z)dxdydz = \iint_S f dydz + g dzdx + h dxdy$$

が成立する．ベクトル記法では $X = (f, g, h)$ とするとき

$$\int_D \mathrm{div} X dv = \int_S X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

となる．ここで $\boldsymbol{n}$ は S 上の各点における長さ 1 の法線ベクトルで，曲面の向きに関し外向きのものを表す．

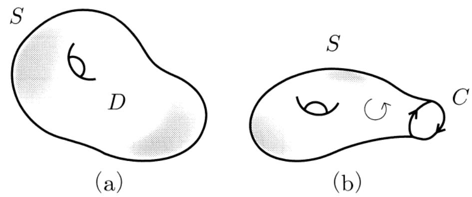


図 6　ガウスの定理・ストークスの定理．

上記において X が非圧縮性の液体の流れを表すとき，ガウスの定理は

D 内の湧き出しの総量 $=$ S からの流出量

であることを表すものである．物理学的にも当然成り立つべき等式と言える．

次の定理は，グリーンの定理を 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の曲面に対して拡張したものである．

定理 6（ストークスの定理） $S \subset \mathbb{R}^3$ を空間内の向き付けられたコンパクトな曲面とし，C を S の境界の曲線とする．C には曲面の向きと同調する向きを入れる．また，$U \subset \mathbb{R}^2$ を S を含む開集合とし，$f, g, h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を U 上定義された任意の 3 つの C^1 級関数とする（図 6 (b) 参照）．このとき，等式

$$\iint_S (h_y - g_z)dydz + (f_z - h_x)dzdx + (g_x - f_y)dxdy = \int_C f dx + g dy + h dz$$

が成立する．ベクトル記法では $X = (f, g, h)$ とするとき

$$\int_S \mathrm{rot} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_C X \cdot \boldsymbol{t}\, ds$$

となる．ここで $\boldsymbol{t}$ は，C 上の各点における長さ 1 の接ベクトルで，与えられた曲線の向きを向いているものを表す．

表1　3つの定理の統一的記述．

定理	ω	$d\omega$
グリーン	$fdx+gdy$	$(-f_y+g_x)dxdy$
ガウス	$fdydz+gdzdx+hdxdy$	$(f_x+g_y+h_z)dxdydz$
ストークス	$fdx+gdy+hdz$	$(h_y-g_z)dydz+(f_z-h_x)dzdx+(g_x-f_y)dxdy$

ストークスの定理の直感的な意味は

S の“真上”から見た X の渦の総量

$=X$ が S の境界 C に沿って循環する量

という極めて自然な等式で表される．面積分の過程で，S の内部では渦は言わば互いに打ち消し合い，境界を巡るものだけが残るのである．

6. 微分形式の概念による統一的記述

グリーンの定理，ガウスの定理，ストークスの定理とベクトル解析で最も重要な3つの定理を述べた．これらはそれぞれ独立の定理と思われるかも知れない．しかし，例えば定理2の D や C を $\mathbb{R}^3$ の中の図形と考えてみれば，定理6の特別な場合と思えることに気付くだろう．実は，3つの定理の本質はすべて同じなのである．このことを，やや形式的な説明にはなるが，微分形式の概念を使って説明すると次のようになる．

まず dx というシンボルの関数倍を $\mathbb{R}$ 上の1形式と言う．$\mathbb{R}$ 上の関数 f に対し，1形式 $df=f'dx$ を考えこれを f の微分と言う．このとき定理1は

$$\int_a^b df=f(b)-f(a)$$

と書けるが，これは df の区間 $[a,b]$ 上の積分が $[a,b]$ の“境界” $\partial[a,b]=(b)-(a)$ 上の f の“積分” $f(b)-f(a)$（この場合は有限和）に等しいことを示している．次に $\mathbb{R}^2$ 上では2つのシンボル dx と dy の関数を係数とする1次結合を1形式と言う．$\mathbb{R}^2$ 上の一般の1形式は，$\omega=fdx+gdy$ の形をしている．このとき ω の微分 $d\omega$ を

$$d(fdx)=dfdx,\ dxdx=0,$$
$$dydy=0,\ dydx=-dxdy$$

等の性質を要請した上で

$$\begin{aligned}d\omega&=dfdx+dgdy\\&=(f_xdx+f_ydy)dx+(g_xdx+g_ydy)dy\\&=(-f_y+g_x)dxdy\end{aligned}$$

と定義する．このとき定理2は

$$\int_D d\omega=\int_{\partial D}\omega$$

と書けることになる．すなわち ω の微分の D 上の積分が，D の境界 $\partial D=C$ 上の ω の積分と等しいことを示している．残るガウスの定理，ストークスの定理も同様に説明することができる．紙面の都合で表1に表す．

3つの定理が持つこのような共通の構造を感じつつ，改めて個々の定理の意味を吟味すれば，より深い理解が得られるだろう．

本稿で述べたことの詳しい解説，あるいはより発展した事項については，次に挙げるいくつかの文献と，それらに引用されている参考文献を見てほしい．

参考文献

1) 高木貞治,『解析概論』, 改訂第3版, 岩波書店, 1983.
2) 杉浦光夫,『解析入門 II』, 東京大学出版会, 1985.
3) 岩掘長慶,『ベクトル解析』, 裳華房, 1960.
4) 坪井俊,『ベクトル解析と幾何学』, 朝倉書店, 2002.
5) 深谷賢治,『電磁場とベクトル解析』, 岩波書店, 1995.
6) 小林昭七,『曲線と曲面の微分幾何』, 改訂版, 裳華房, 1995.
7) 森田茂之,『微分形式の幾何学』, 岩波書店, 2005.

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

微分方程式



山崎　満

1. はじめに

理系の大学生は1年次に微分積分学と線形代数学を学び，2年次に微分方程式を学ぶのが通例である．ただし，ここで述べる微分方程式とは，常微分方程式のことであり，特に線形に重きが置かれることが多い．以下の文章では，微分積分学で学ぶ1変数および多変数の微分と積分，線形代数学で学ぶ行列の対角化および Jordan 標準形を仮定して，話を進めることとする．

まず，$F = F(x, Y_0, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ を既知関数，$y = y(x)$ を未知関数，x を独立変数とするとき，$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ を微分方程式，あるいはより詳しく **n 階常微分方程式**といい，この方程式を満たす $y = y(x)$ を求めることを微分方程式を解くという．また，未知関数と微分方程式が複数あるとき，この（連立）微分方程式を微分方程式系ということがある．微分方程式は explicit に解けることは一般には少ないが，定性的な解析はできることが多い．また，このような解析を**力学系**と呼ぶことがある．ここでは，y は1変数関数であり，y の微分は x 変数のみによるものであるが，y が多変数関数であり，y の微分に偏微分を含むような微分方程式を偏微分方程式というが，本稿は大学2年次の学生を対象としているので，ここではあまり触れない．

物理学のはじめに習う Newton（ニュートン）の運動方程式，力 = 質量 × 加速度，$F = ma$ は F, m が既知であり，時間変数を t, 物体の位置を $x = x(t)$ とするとき，$a = x''(t)$ であるので，これは2階常微分方程式である．もっとも，Newton の運動方程式は，Euler（オイラー）によるものとされている．

2. 具体例

微分方程式を論じる著書は数多くあり，本稿をできるだけオリジナルなものとしたいが，初学者に分かり易くということが主眼であるから，よく知られている例を述べることをご容赦願いたい．$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ に陰関数定理を用いて，$y^{(n)} = F_1(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ の形にしたものを正規形という．

1. $y' = g(x)h(y)$ の形のものを**変数分離形**といい，次のように解ける．

$$\frac{dy}{dx} = y' = g(x)h(y)$$

から，

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx.$$

両辺を積分して，

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx.$$

ここから，陰関数定理を用いて，$y = y(x)$ として，解が求まる．

2. $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ を定数として，

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

の形のものを**定数係数線形常微分方程式**という．特に，$f = 0$ のとき，**斉次**であるといい，次のように解は求まる．λ_0 が**特性方程式**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

の解であるとき，$y = e^{\lambda_0 x}$ は解である．実際，

$$y' = \lambda_0 e^{\lambda_0 x}, y'' = \lambda_0^2 e^{\lambda_0 x}, \cdots, y^{(n)} = \lambda_0^n e^{\lambda_0 x}$$

だから，

$$\begin{aligned} & y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y \\ =\ & (\lambda_0^n+a_{n-1}\lambda_0^{n-1}+\cdots a_1\lambda_0+a_0)e^{\lambda_0 x} \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

となり, $y=e^{\lambda_0 x}$ は解である．さらに, λ_0 が特性方程式の k 重根であるときは, $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ も解である．実際, $y=x^j e^{\lambda_0 x}$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$ とするとき,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dx}-\lambda_0\right)y=y'-\lambda_0 y=jx^{j-1}e^{\lambda_0 x}, \\ & \cdots,\left(\frac{d}{dx}-\lambda_0\right)^j y=j!e^{\lambda_0 x}, \\ & \left(\frac{d}{dx}-\lambda_0\right)^{j+1} y=0,\cdots, \\ & \left(\frac{d}{dx}-\lambda_0\right)^k y=0. \end{aligned}$$

ここで，特性方程式は λ_0 を k 重根として持つので, $k(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^k$ の形をしてる．これに応じて，微分方程式も $k\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_0\right)^k y=0$ の形をしている．従って, $y=x^j e^{\lambda_0 x}$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$ も解である．こうして, n 個の線形独立な解が求まった．一般に, n 階の微分方程式は n 個の線形独立な解を持つ．

実際には，運用上，多少の注意を必要とする．次の具体例で見てみよう．物体にバネの力のみが働いているとすると，バネの力が働かない点からの位置 x に物体があるときは, 物体に x とは逆向きの力が働き, その力の大きさは距離の長さ $|x|$ に比例する．従って，比例定数を k として，バネに働く力は $-kx$ となる．Newton の運動方程式から, $-kx=mx''$, つまり $x''+\frac{k}{m}x=0$. ここで, $\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega$ とおくと, $x''+\omega^2x=0$. このとき，特性方程式は $\lambda^2+\omega^2=0$. 従って, $\lambda=\pm\omega i$ と求まる．前の議論により, $x=e^{\omega it}$ と $x=e^{-\omega it}$ が解であることがわかる．しかしながら，これらは期待されている "解" ではない．というのも，位置 x は実数であるのに, $x=e^{\omega it}$ と $x=e^{-\omega it}$ は複素数であるからだ.

よく知られている **Euler の公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を知らない読者のために，簡単に解説しておこう．指数関数 $f(z)=e^z$ は何回微分しても $f^{(n)}(z)=e^z$ であり, $z=0$ の周りの Taylor 展開の式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

に形式的に代入すると, $f^{(n)}(0)=e^0=1$ だから,

$$e^z=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n.$$

同様にして, $\sin z, \cos z$ も Taylor 展開することができて,

$$\begin{aligned} \sin z\ &=\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1}, \\ \cos z\ &=\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}z^{2m} \end{aligned}$$

であることがわかる．ここで, "形式的に" e^z において, $z=i\theta$ とすると,

$$\begin{aligned} e^{i\theta}\ &=\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\theta)^n \\ &=\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}+i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} \\ &=\ \cos\theta+i\sin\theta \end{aligned}$$

となり, Euler の公式が示された.

方程式 $x''+\omega^2x=0$ に戻ろう．ここで, $x_1=x_1(t)$ と $x_2=x_2(t)$ がともに解のとき, C_1, C_2 を定数として, $x=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$ も解であることが，実際の計算により確かめられる．これを方程式の線形性という．特に, $C_1=C_2=\frac{1}{2}$ のときは,

$$x=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)=\cos\omega t,$$

$C_1=\frac{1}{2i}, C_2=-\frac{1}{2i}$ のときは,

$$x=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)=\sin\omega t$$

となり，実数値を取る線形独立な解 $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ が得られた.

このような形式的な計算を数多く行なったのが 19 世紀の数学であり, Euler の功績は計り知れない．20 世紀になり，こうした計算の正当性，数学的に正しいことの検証が再検討され，数学は飛躍を遂げるのであるが，今の大学では，計算の正当性を立証する理論ばかりを教えることが多く，学生たちは計算を苦手としている．本来は，計算をしていくうちに，数学の魅力が生まれてくることも多いので，是非，面倒な計算を厭わないでほしい．計算結果がよっぽど変なときはその計算方法に誤りがあることが多いが，尤もらしい計算結果は大抵の場合，正当化できる.

3. Bessel 関数

ここで，唐突ではあるが，特殊関数の 1 つである Bessel（ベッセル）関数について考えてみよう．

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin t-nt\right)\,dt$$

$(n=0,1,2,\cdots)$ は **n 次 Bessel 関数**，あるいは単に Bessel 関数あるいは**第一種円柱関数**と呼ばれている．ここで，$f(x,t):=\cos\left(x\sin t-nt\right)$ とおくと，f は $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ 上で $\mathcal{C}^{\infty}$ 級である．積分記号下での微分の定理より，

$$\begin{aligned}J_n'(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\cos\left(x\sin t-nt\right)\,dt\\&=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(x\sin t-nt\right)\sin t\,dt.\end{aligned}$$

同様に，$J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin t-nt\right)\sin^2 t\,dt$. よって，

$$\begin{aligned}&-J''(x)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin t-nt\right)\sin^2 t\,dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin t-nt\right)\left(1-\cos^2 t\right)dt\\&=J_n(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin t-nt\right)\cos^2 t\,dt.\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\{\sin\left(x\sin t-nt\right)\}\\&=\left(x\cos t-n\right)\cos\left(x\sin t-nt\right)\end{aligned}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}&-J_n''(x)-J_n(x)\\&=-\frac{1}{\pi x}\int_0^{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\{\sin\left(x\sin t-nt\right)\}\right.\\&\qquad\left.+n\cos\left(x\sin t-nt\right)\right]\cos t\,dt\\&=-\left[\frac{\sin\left(x\sin t-nt\right)}{\pi x}\cos t\right]_{t=0}^{t=\pi}\\&\quad-\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(x\sin t-nt\right)}{\pi x}\sin t\\&\quad-\frac{n}{\pi x}\int_0^{\pi}\cos\left(x\sin t-nt\right)\cos t\,dt\\&=\frac{1}{x}J_n'(x)-\frac{n}{\pi x^2}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{\sin\left(x\sin t-nt\right)\}\\&\qquad\qquad+n\cos\left(x\sin t-nt\right)\,dt\\&=\frac{1}{x}J_n'(x)-\frac{n}{\pi x^2}\{[\sin\left(x\sin t-nt\right)]_{t=0}^{t=\pi}\\&\qquad+n\pi J_n(x)\}\\&=\frac{1}{x}J_n'(x)-\frac{n^2}{x^2}J_n(x),\end{aligned}$$

すなわち $J_n''(x)+\frac{1}{x}J_n'(x)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J_n(x)=0$. 従って，$J_n$ は **Bessel の微分方程式**

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

を満たす．

Bessel の微分方程式が自然に現れることは次のようにして分かる．$\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ を

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$$

とする．Dirichlet（ディリクレ）境界条件下での $-\triangle$ の**固有値問題**，すなわち

$$\begin{cases}-\triangle\varphi=\lambda\varphi, & x\in\Omega,\\ \varphi=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

を考える．但し，

$$\begin{aligned}&\partial\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\},\\&\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

定数 λ を固有値と呼び，$\varphi(\not\equiv 0)$ を λ に属する固有関数と呼ぶ．このとき，極座標の変数分離形に書ける解をすべて求めよう．すなわち，

$$\varphi(x,y)=u(r)v(\theta)$$

$(r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\tan^{-1}(y/x))$ とおくと，$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ であるから，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\lambda\right)u(r)v(\theta)=0.$$

これを変形して，

$$\frac{r^2}{u}\left(u''+\frac{1}{r}u'+\lambda u\right)=-\frac{v''}{v}.$$

この左辺は r のみの関数，右辺は θ のみの関数，換言すれば，左辺は θ に依存せず，右辺は r に依存しない．よって，両辺は r,θ に依存しない，すなわち定数である．これを $k\in\mathbb{R}$ とおく．よって，$v''+kv=0$. このとき，特性方程式は $\lambda^2+k=0$ であり，その解は $\lambda=\pm\sqrt{-k}$.

もしも，$k<0$ ならば，

$$v(\theta)=C_+e^{\sqrt{-k}\theta}+C_-e^{-\sqrt{-k}\theta}$$

となり，$v=0$ でない限り，自明な周期境界条件 $v(\theta+2\pi)=v(\theta)$ を満たさない．また，$v=0$ ならば $\varphi\equiv 0$ となり，φ が固有関数であるという仮定に

反する．

よって，$k \geq 0$ であるから，$k = m^2$ $(m \in \mathbb{R})$ とおく．このとき，

$$v(\theta) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta$$

となり，自明な周期境界条件 $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$ が $m \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \cdots\}$ のときに満たされる．u が満たすべき条件は

$$\begin{cases} u''(r) + \dfrac{1}{r}u'(r) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{r^2}\right)u(r) = 0 \\ \quad (0 < r < 1), \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

である．ここで，$-\triangle\varphi = \lambda\varphi$ の両辺に $\bar{\varphi}$ を乗じて，Ω 上で積分すると，$-\int_\Omega \bar{\varphi}\triangle\varphi\, dx = \lambda \int_\Omega |\varphi|^2\, dx$. これに，Green（グリーン）の定理

$$\int_\Omega (f\triangle g + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \nu} dS$$

（但し，ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル）を適用すると，$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx = \lambda \int_\Omega |\varphi|^2\, dx$, すなわち

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx}{\int_\Omega |\varphi|^2\, dx} \geq 0$$

ゆえ，$\lambda > 0$ でなければならないことがわかる（$\lambda = 0$ は $\varphi \equiv 0$ を導くので除外）．この手法はエネルギー法と呼ばれるものの一つである．さらに，$r \to \sqrt{\lambda}r =: r'$ と変数変換し，$U(r') := u(r'/\sqrt{\lambda})$ とおき，さらに r' を r と書き改めると，

$$\begin{cases} U'' + \dfrac{1}{r}U' + \left(1 - \dfrac{m^2}{r^2}\right)U(r) = 0 \\ \quad (0 < r < \sqrt{\lambda}), \\ U(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

よって，U が Bessel の微分方程式を満たすことがわかった．

4. 行列の指数関数

微分方程式 $\frac{dx}{dt} = ax$ は変数分離形であるので，

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int a\, dt$$

から, $\log|x| = at + c$, すなわち $x = \pm e^c e^{ta}$. $C := \pm e^c$ とおいて，$x = e^{ta}C$. これまで, x は実数値としていたが, x を実ベクトル値に拡張したい．これに従い，実定数 a は実定行列 A となり，微分方程式は $\frac{dx}{dt} = Ax$ となる．自然に拡張しようとすると，この解は $x = e^{tA}C$ となる．ここで，**正方行列 B の指数関数e^B** を定義しなくてはならない．そのために，先ほど見た指数関数 e^z の Taylor 展開 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ を活用し，

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$$

と定義しよう．この右辺が収束していることは次のようにして分かる．一般に，d 次正方行列 $P = (p_{ij})$ に対して，

$$\|P\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |p_{ij}|^2}$$

とおくと，Cauchy–Schwarz の不等式から，

$$\begin{aligned} \|PQ\|^2 &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \left|\sum_{j=1}^{d} p_{ij}q_{jk}\right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} |p_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j'=1}^{d} |q_{j'k}|^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |p_{ij}|^2 \cdot \sum_{j'=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} |q_{j'k}|^2 \\ &= (\|P\|\|Q\|)^2, \end{aligned}$$

すなわち

$$\|PQ\| \leq \|P\|\|Q\|.$$

特に，

$$\|P^n\| \leq \|P\|^n.$$

また，線形空間として，d 次正方行列の全体のなす線形空間 $M_{d,d}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{d\times d}$（同型）と見なすことができるので, 証明は $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ が三角不等式 $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ を満たすことと全く同様に，

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

また，

$$\begin{aligned} \|cP\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |cp_{ij}|^2} \\ &= |c|\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} |p_{ij}|^2} = |c|\|P\|. \end{aligned}$$

従って，

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{n!} B^n\right\|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!}\right| \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|B\|^n = e^{\|B\|} < \infty$$

となり，収束していることがわかる（厳密には，ノルム等の概念を定義しておく必要があるが，ここでは触れない）．よって，

$$x = e^{tA}C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n C$$

となる．さらに，上で見たように，右辺は，（ノルム収束しているので）項別微分可能であり，

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^n}{n!}A^n\right)C$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n C = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n C = Ax$$

だから，x は $\frac{dx}{dt} = Ax$ の解である．

また，$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

だから，

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^m \cdot \mathbb{1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} J \\ &= (\cos t)\mathbb{1} + (\sin t)J. \end{aligned}$$

上式と $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を比較してみてほしい．

それでは，バネの運動方程式 $x'' + \omega^2 x = 0$ を再考してみよう．ここで，$y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

となるので，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，y は微分方程式 $y' = Ay$ を満たす．従って，$y = e^{tA}C$ となる．では，実際に，この場合に e^{tA} を計算してみよう．そのために，A を対角化しよう．行列 A の固有方程式は，

$$0 = \det(\lambda\mathbb{1} - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2.$$

従って，$\lambda = \pm\omega i$. ここで，$\lambda = \pm\omega i$ に対する固有ベクトルはそれぞれ，$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\omega i \end{pmatrix}$ だから，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega i & -\omega i \end{pmatrix}$$

とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \omega i & 0 \\ 0 & -\omega i \end{pmatrix}$. いま，

$$D = \begin{pmatrix} \omega i & 0 \\ 0 & -\omega i \end{pmatrix}$$

とおくと，$A = PDP^{-1}$. ここで，D は対角行列だから，$D^n = \begin{pmatrix} (\omega i)^n & 0 \\ 0 & (-\omega i)^n \end{pmatrix}$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (PDP^{-1})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} PD^nP^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega i & -\omega i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\omega i)^n & 0 \\ 0 & (-\omega i)^n \end{pmatrix} \\ &\quad \frac{1}{-2\omega i}\begin{pmatrix} -\omega i & -1 \\ -\omega i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2n!}\begin{pmatrix} (\omega i)^n & (-\omega i)^n \\ (\omega i)^{n+1} & (-\omega i)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (\omega i)^{-1} \\ 1 & (\omega i)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^n}{2n!} \\ &\begin{pmatrix} i^n + (-i)^n & \omega^{-1}\left\{i^{n-1} - (-i)^{n-1}\right\} \\ \omega\left\{i^{n+1} + (-i)^{n+1}\right\} & i^n - (-i)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで，x は y の第 1 成分だから，

$$\begin{aligned} x &= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^n}{n!} \frac{i^n + (-i)^n}{2} \\ &\quad + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^n}{\omega n!} \frac{i^{n-1} - (-i)^{n-1}}{2} \\ &= c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(\omega t)^{2m}}{(2m)!} \\ &\quad + \frac{c_2 i}{\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(\omega t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= c_1 \cos\omega t + \frac{c_2 i}{\omega}\sin\omega t \end{aligned}$$

となり，解 x は 2 つの 1 次独立な解 $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の線形和で表されることが再確認された．

また，これまで，正方行列 B の指数関数を考えてきたが，さらに一般化して，無限次の行列，すなわち**作用素 B の指数関数 e^B** を考えることもできる．この

作用素は，一般には閉作用素と呼ばれるもので，定義域が空間全体でないために，B^n を考えていくと，定義域が次々と狭まられていき，うまく行かない．そのため，指数関数の Taylor 展開をもとにして，指数関数を定義することはできない．代わって，

$$\lim_{n\to\infty} nB(n\mathbb{1}-B)^{-1}$$

により B の指数関数（正確には生成半群という）e^B を定義する．これを Hille（ヒレ）–吉田の定理[3,7]という．さらに，ある種の条件をみたす非線形作用素 B にもこの考え方が拡張されること（Crandall–Ligett の定理[2]）も知られており，これにより非線形保存則 $\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=0$ の解の存在を証明する[1,5]こともできる．

5. 非線形微分方程式

最後に，非線形微分方程式について，簡単な考察をしてみよう．$\dot{}$（ドット）で t での微分を表し，$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に対して，$F(X)=F(x,y)$ が線形ではないとき，微分方程式 $\dot{X}=F(X)$ を非線形微分方程式という．非線形のときは，一般に取り扱うことは難しいので，いくつか特徴的な点の周りでの解の様子を考えることが多い．例えば，$X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ を平衡点，すなわち $F(X_0)=F(x_0,y_0)=0$ とする．このとき，$\dot{X}=0$ となり，$X(t)=X_0$ は解となる．では，X_0 に近い解についてはどうであろうか．ここで，F を X_0 の周りに Taylor 展開すると，

$$F(X)=F'(X_0)(X-X_0)+O(\|X-X_0\|^2)$$

であるから，$F'(X_0)\neq 0$ ならば，X_0 に近い解は，$Y:=X-X_0$ とおいたとき，線形化方程式 $\dot{Y}=F'(X_0)Y$ に従うように思えるが，そう単純ではないことが次の例[4]から分かる．

$$\dot{x}=-y+\varepsilon x(x^2+y^2),\quad \dot{y}=x+\varepsilon y(x^2+y^2).$$

この方程式を極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ で表してみよう．$r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\tan^{-1}(y/x)$ だから，

$$\dot{r}=\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\varepsilon(x^2+y^2)^{3/2}=\varepsilon r^3,$$

$$\dot{\theta}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\dot{y}x-\dot{x}y}{x^2}=1.$$

この方程式に対する線形化方程式は

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=x.$$

あるいは

$$\dot{r}=0,\quad \dot{\theta}=1$$

であり，原点を中心とする円を回る $(r_0\cos t, r_0\sin t)$ は解であることがわかる．しかし，元の方程式では，

$$\int\frac{1}{r^3}\,dr=\varepsilon\int dt$$

から，$t=0$ のとき $r=r_0, \theta=\theta_0$ とすると，

$$r=\left(\frac{1}{r_0^2}-2\varepsilon t\right)^{-1/2},\quad \theta=\theta_0+t$$

となり，$\varepsilon>0$ のときは

$$\lim_{t\to(2\varepsilon r_0^2)^{-1}} r=\infty,$$

$\varepsilon<0$ のときは

$$\lim_{t\to\infty} r=0$$

となる．これは，線形化方程式からの解析では予想がつかなかったことであり，非線形方程式は平衡点の近くでさえ，線形化方程式では不十分であることを意味している．

6. 初学者のための教科書

これまでに，数多くの教科書が出版されていて，どれも特徴があるが，ここでは[4,6]を挙げておくこととする．

参考文献

1) M.G. Crandall, "The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables", *Israel J. Math.* **12**, 108–132 (1972).
2) M.G. Crandall, T.M. Ligett, "Generalization of semi-groups of nonlinear transformation on general Banach spaces", *Amer. J. Math.*, **93**, 265–298 (1971).
3) E. Hille, R.S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc., the third edition, 1968.
4) M.W. Hirsh, S. Smale, R.L. Devaney 著,『力学系入門—微分方程式からカオスまで—』, 共立出版 (2007).
5) D. Serre, *Système de Lois de Conservation*, Vol.I–II. Paris: Diderot, 1996.
6) 高橋陽一郎著,『微分方程式入門』, 東京大学出版会 (1988).
7) K. Yosida, *Functional analysis*, Springer, the sixth edition, 1980.

（やまざき・みつる，国際基督教大学教養学部）

集合

抽象化の道程

松尾　厚

1. はじめに

お付き合いのある近所の小児科の先生が，小学校や中学校で集合を学んだことを思い返して「集合は役に立つよねぇ」と述懐されていた*1)．見方は違うかもしれないが，筆者も同意見である．

子どもの頃に使った算数の教科書を35年ぶりに開いてみると，そこには次のように書かれている*2)．

> 集合ははんいのはっきりしたものの集まりをひとまとめにしたものです．集合をつくっている1つ1つのものを集合の要素*3)といいます．

読みやすく手短かにまとまっていて，優れた説明である．なかでも「ひとまとめにした」というくだりは秀逸である．

もっとも，落ち着いて考えてみると，「はんいのはっきりした」とはどういうことか，「ものの集まり」とは何か，などの疑問が湧いてくる．しかし，これ以上の詳しい説明は容易ではなく，それによって素朴な疑問が解消するわけでもない．説明できない言葉を完全になくすことはできないから，むしろ正確な運用を学ぶことを通して集合を理解しようとするのが良いだろう*4)．

本稿では，限られた紙数ではあるが，集合によって抽象的な概念が定式化され，その性質が記述される様子を垣間見たいと思う*5)．

2. 自然数と集合

ものを数えることは数学の原点と言ってよい．ここでは，数えるという行為を振り返り，集合と自然数の関わりについて考えてみよう．

2.1 はじめての抽象化

小学校に入学すると，早速「さんすう」の時間に数の基本的な扱い方を学ぶ．何しろ入学したての1年生であるから，学校の授業といっても，先生や友達と遊びながら，あの手この手で数を学んでいくわけである．

数は抽象的な概念であり，抽象化は余計な属性を忘れることによってなされる．例えば，袋に蜜柑が3個入っていたり，動物園に象が3頭いる状況から，袋と蜜柑や，動物園と象という属性を忘れ去って残るのが3という概念であり，この種の概念を**自然数**と呼ぶ．

自然数には，各自然数に対して直後の自然数がただ一つ決まるという性質がある．例えば，袋に

*1)　昭和46年（1971年）施行の小学校学習指導要領では，小学校4年で集合・要素という言葉や記号 { }, ⊂ の使い方を学んだ．残念なことに，昭和55年（1980年）施行の指導要領で集合は算数から姿を消した．

*2)　東京書籍『新訂新しい算数・4下』昭和50年発行．

*3)　本稿では「集合の要素」を「集合の元」と呼ぶ．

*4)　だからと言って疑問を捨て去ってよいということはない．素朴な疑問は大切にすべきだと思う．

*5)　集合論そのものに詳しく触れる余裕はないので，例えば文献3, 4) などを参照のこと．

蜜柑が3個入っているとき，蜜柑を一つだけ袋に追加すると蜜柑が4個になる．袋と蜜柑でなくても同様だから，3 の直後の自然数は 4 と決まる．このようにして，自然数には順序が定まっている．

2.2 ものの数え方

そこで，自然数を 1 から n まで順に取り出して集め「ひとまとめ」にした集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を考える．この集合は，その元（要素）を順序に従って並べたとき，最後の数 n がちょうど元の個数と一致するという都合の良い性質を持っている．

お皿の上の林檎の数を数えるときには，まず林檎を一つ指差して 1 と唱え，集合 $\{1\}$ とお皿の上の林檎の集合を比較する．まだ林檎が残っている場合には，全体として一対一に対応していないので，残りの林檎のうちの一つを指差して 1 の直後の自然数である 2 を唱え，集合 $\{1, 2\}$ と林檎の集合を比較する（図 1）．

$1 \mapsto$	林檎 A	$1 \mapsto$	林檎 A
	林檎 B	$2 \mapsto$	林檎 B
	林檎 C		林檎 C
	林檎 D		林檎 D

$1 \mapsto$	林檎 A	$1 \mapsto$	林檎 A
$2 \mapsto$	林檎 B	$2 \mapsto$	林檎 B
$3 \mapsto$	林檎 C	$3 \mapsto$	林檎 C
	林檎 D	$4 \mapsto$	林檎 D

図 1

これを繰り返して，例えば 4 と唱えたところで，もはや林檎が残っていないなら，集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ のすべての元と，お皿の上のすべての林檎の間に一対一の対応がついたことになり，林檎の数は，この集合の元の個数である 4 に等しいことになる．ものを数えるとは，集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の元と一対一対応を付けて元の個数を比較することにほかならない[*6]．

ものを数える際には，数えた結果が指差す順序によらないことが重要である（4.2 節）．お皿の上の林檎を二度数えて結果が違っていたら，少なくとも一度は，漏れなく重複なく指差すことに失敗したか，または正しく数を唱えることに失敗したと考えてよい[*7]（図 2）．

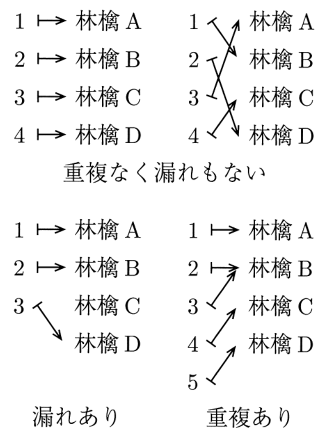


図 2

2.3 自然数の構成法

ところで，元の個数が n であるような集合の標準モデルが別途うまく構成できれば，それが自然数 n の役割を果たすだろう．その出発点は元をまったく持たない集合である．そのような集合を空集合と呼び，$\varnothing$ と表す[*8]．

まず $0 = \varnothing$ とおく．次に $1 = \{0\}$ とおくと，これは 0 を元に持つから空集合ではないので，$1 \neq 0$ である．次に $2 = \{0, 1\}$ とおくと，これは 0 とも 1 とも異なる集合である．こうして集合が n まで構成されたら，その次を $n + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ と定めるという手順で次々と集合が得られる．

$$0 = \varnothing,\ 1 = \{\varnothing\},\ 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$
$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},\ \ldots$$

これを定義として採用すれば，自然数の漠然とした理解から訣別できる[*9]．さらに，自然数から出発して，有理数，実数，複素数なども集合によっ

*6) 一般の二つの集合の一対一対応による比較は少々難しいので第 4 節で述べる．

*7) 現実には途中で誰かが林檎を食べた可能性もあるが，数学とは関係がないので気にしないことにする．

*8) 空集合の記号 $\varnothing$ はノルウェー語の文字 Ø に由来する．

*9) 数が集合によって構成されるという事実が重要で，その性質が正しく把握できてさえいれば，構成の委細に関らず数を扱って支障はない．

て厳密に構成される[*10)].

3. 集合と写像

集合を正確に運用するには，所属関係に基づいて集合を把握し，写像を利用して性質を記述することが欠かせない．ここでは，所属関係と写像に関する基本事項をまとめておく．

3.1 集合と所属関係

文字 x の表すものが集合 A の元であるとき，$x \in A$ と表し，x は A に**属する**と言う．そうでないとき $x \notin A$ と表す．記号 $\in$ の表す概念を所属関係（membership relation）と呼ぶ[*11)].

集合 A に対しては，各 x に対して $x \in A$ であるか，$x \notin A$ であるか，いずれか一方が定まっている．また，その定まり方から集合 A はただ一つに決まる[*12)].

例えば，空集合 $\varnothing$ は，いかなる x に対しても $x \notin \varnothing$ となる唯一の集合である．一般に x に関する条件 $P(x)$ を考え，集合であって x がそれに属するための必要十分条件が $P(x)$ であるようなものを $\{x \mid P(x)\}$ と表す[*13)]．例えば，

$$\mathbf{N} = \{x \mid x \text{ は自然数である }\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$
$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ は実数である }\}$$

などと表し，それぞれ自然数全体の集合，実数全体の集合と呼ぶ．文字 x の範囲を集合 X の元に限る場合は $\{x \in X \mid P(x)\}$ と表す．

集合 A に属する元がすべて集合 B にも属するとき，A は B に**含まれる**と言い $A \subset B$ と表す[*14)]．記号 $\subset$ の表す概念を集合の包含関係という[*15)].

一般に，集合 X に含まれる集合を X の**部分集合**と呼ぶ．集合 X の部分集合全体の集合 $\{x \mid x \subset X\}$ を X の**巾**(べき)**集合**と呼び，$\mathrm{P}(X)$ と表す[*16)].

3.2 写像と一対一対応

集合 A から集合 B への**写像**とは，A のどの元に対しても，それに対して B の元がただ一つ対応するような対応の規則のことである[*17)].

写像を一つ考え，それを f と名付けたとする．これが A から B への写像であることを $f : A \longrightarrow B$ と表す．また，f によって x に y が対応するとき $f : x \mapsto y$ と表す．そのような y は x に対してただ一つ存在するので，これを $f(x)$ と表す．

写像 $f : A \longrightarrow B$ が集合 A と集合 B のすべての元の間の**一対一対応**を与えるためには，次の二つの条件がともに成立することが必要十分であり，そのような写像を**全単射**と呼ぶ．

(i) どの元 $y \in B$ に対しても，元 $x \in A$ で $y = f(x)$ となるものが存在する．

(ii) どの元 $y \in B$ に対しても，元 $x \in A$ で $y = f(x)$ となるものは一意的である[*18)].

条件 (i) を満たす写像を**全射**と呼び，条件 (ii) を満たす写像を**単射**と呼ぶ[*19)]．簡単に言えば，B の元が漏れなく対応しているのが全射であり，重複なく対応しているのが単射である（図 2 参照）．

全単射 $f : A \longrightarrow B$ に対しては，各 $y \in B$ に対して，$y = f(x)$ となる唯一の $x \in A$ を対応させる写像が考えられる．これは B から A への全単射であり，f の**逆写像**と呼ばれる．

4. 集合の比較

写像に関する用語の準備ができたので，これを

*10) 例えば，文献 3) などを参照．

*11) 記号 $\in$ はギリシャ語 $\grave{\varepsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ の頭文字 ε に由来する．

*12) 従って $A = B$ を示すには，$x \in A$ と仮定して $x \in B$ を示し，$x \in B$ と仮定して $x \in A$ を示せばよい．

*13) 区切り記号として $\mid$ の代わりにコロン : を用いる流儀やセミコロン ; を用いる流儀もある．

*14) これを $A \subsetneqq B$ あるいは $A \subseteq B$ と表し，$A \neq B$ のときに限り $A \subset B$ と表す流儀もある．

*15) 一般に $A \subset A$ であり $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$ であり，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$ である．

*16) この「巾」は「冪」の略字体である．

*17) ここで言う規則は規則的でなくてよい．つまり，対応のさせ方が x に応じて個別に定められていてもよい．

*18) 一意的であるとは「存在しないか，存在する場合にはただ一つである」という意味である．

*19) 単射の条件 (ii) は A の元を動く文字 u, v により「$f(u) = f(v)$ ならば $u = v$ である」と言える．

利用して二つの集合を比較してみよう．有限集合では起こり得ない現象が無限集合では起こることがある．深く考えながら読んでいただければ幸いである．

4.1 集合の対等

集合 A と集合 B のすべての元の間の一対一対応が存在するとき，すなわち A から B への全単射が存在するとき，A と B は**対等**である，あるいは，A は B と対等であると言う．これを $A \simeq B$ と表すことにしよう[*20]．

集合 A から集合 B への単射が存在することは，A が B の部分集合と対等となることにほかならない．また，集合 A から集合 B への全射でない単射が存在することは，A が B の真部分集合と対等となることにほかならない．ただし，B の真部分集合とは，B の部分集合で B とは異なるもののことである．

4.2 有限集合の性質

ある自然数 n と対等な集合を**有限集合**と呼ぶ[*21]．自然数 m, n について $m \simeq n$ ならば $m = n$ であることに注意すると[*22]，有限集合 A に対して $n \simeq A$ となる自然数 n はただ一つであることが分かる[*23]．この自然数 n を A の**元の個数**または A の**位数**と呼び，以下では $|A|$ と表す．

簡単に言えば，有限集合とは，元を数えることによって，元の個数が一つの自然数に決まるような集合のことである．

有限集合 A, B に対しては，次が成立する．

(a)　$|A| = |B| \iff A$ は B と対等である．

(b)　$|A| \leq |B| \iff A$ は B の部分集合と対等である．

さらに，A, B が有限集合のとき，A が B の真部分集合と対等ならば $|A| < |B|$ が成立する．すなわち，有限集合 A, B については，A の元と B の元との間に一対一対応を付けて B の元が余ったら，B の元の個数の方が A の元の個数よりも真に多いと言える．

4.3 有限集合と無限集合

有限集合とは限らない一般の集合 A, B に対しても，上の (a), (b) に倣い，A が B と対等であるとき $|A| = |B|$ と表し，A が B の部分集合と対等であるとき $|A| \leq |B|$ と表すことにする[*24]．さらに，$|A| \leq |B|$ かつ $|A| \neq |B|$ であるとき $|A| < |B|$ と表そう．

では，A が B の真部分集合と対等であるとき $|A| < |B|$ であると言えるだろうか．これは一般には成立しない．実際，各自然数 n に対して直後の自然数 $n+1$ を対応させれば，集合 $\mathbf{N}$ は自分自身の真部分集合 $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ と対等になるが[*25]，もとより $|\mathbf{N}| = |\mathbf{N}|$ だから，$|\mathbf{N}| < |\mathbf{N}|$ とはならない（図 3)．

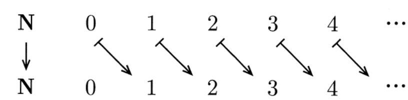


図 3

一般に有限集合でない集合を**無限集合**と呼ぶ．無限集合 X は必ず $\mathbf{N}$ と対等な部分集合を含み[*26]，$\mathbf{N}$ は真部分集合 $\mathbf{N}_+$ と対等なので，X も自分自身の真部分集合と対等になる．かくして，自分自身の真部分集合と対等になるかどうかで有限集合と無限集合は峻別されるのである．

4.4 無限集合の大小

集合 X の巾集合 $\mathrm{P}(X)$ を考えると，対応 $x \mapsto \{x\}$ は X から $\mathrm{P}(X)$ への単射を与えるから $|X| \leq |\mathrm{P}(X)|$ である．

定理（カントール） 集合 X に対して $|X| < |\mathrm{P}(X)|$ が成立する．

---

*20）一般に $A \simeq A$ であり，$A \simeq B$ かつ $B \simeq C$ ならば $A \simeq C$ であり，$A \simeq B$ ならば $B \simeq A$ である．

*21）自然数の構成（2.3 節）に従って，$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ とした．もちろん，$\{1, 2, \ldots, n\}$ と対等と言ってもよい．

*22）数学的帰納法によって証明される．

*23）従って，漏れなく重複なく指差す限り，数えた結果は指差す順序によらない（2.2 節)．

*24）集合論では X が有限集合でない場合にも記号 $|X|$ に意味を与えて X の基数または濃度と呼ぶ．

*25）ガリレオ・ガリレイ『新科學對話』（岩波文庫）に「対応 $n \mapsto n^2$ によって自然数全体と平方数全体は対等だが，一から百万までの自然数のうち平方数は僅か千分の一しかない」という考察がある（1638 年)．

*26）厳密に言うと可算選択公理というものを用いて示される．

これを示すには X から $\mathrm{P}(X)$ への全射が存在しないことを言えばよい．そこで，全射 $f: X \longrightarrow \mathrm{P}(X)$ が存在したとし，矛盾を導こう．そのため，集合 $A=\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ を考えると，これは X の部分集合だから $A \in \mathrm{P}(X)$ であり，f は全射だから $f(a)=A$ となる $a \in X$ が存在する．集合 A の定め方から，そのような a について，$a \in A$ のとき $a \notin A$ となり，$a \notin A$ のとき $a \in A$ となって矛盾である[*27]．

この定理によって $|\mathbf{N}|<|\mathrm{P}(\mathbf{N})|<|\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbf{N}))|<\cdots$ なる列が得られる．無限集合にも大小があり，無限集合の大きさには限りがないのである[*28]．

5. 概念の定式化

抽象的な概念が集合によって明瞭に定式化される様子を具体例を通して見てみよう．集合の構成法との関連が重要な鍵として浮かび上がってくるであろう．

5.1 座標とは何か—集合の直積

座標平面上の点 P は (a, b) のように二つの実数の組で表され，組 (a, b) を点 P の座標という（図 4）．では，そもそも実数の組とは何だろうか．

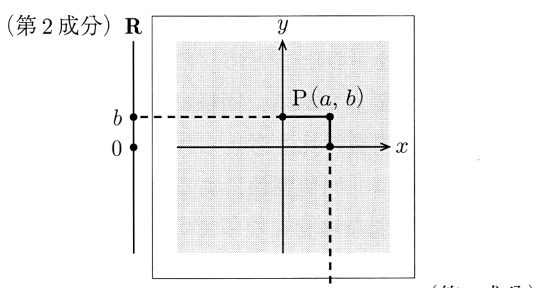


図 4

二つの成分を区別するため，組 (a, b) は次の性質を持つべきである．

(P)　$(a, b)=(c, d) \Longleftrightarrow a=c$ かつ $b=d$.

実は，この性質を持つ「組」を集合によって定義することができる．実際，元 $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $(a, b)=\{\{a\},\{a, b\}\}$ と定めればよい．

そこで，そのような組 (a, b) 全体の集合を $\mathbf{R}^2$ とおき，あらためて平面の定義とする．同様に，3 個の実数の組 (a, b, c) 全体の集合として 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ が定義され，さらに，一般の自然数 n に対しても n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ が定義される．そのような空間は，例えば直線上の n 個の点の配置全体などとして自然に現れる．

この構成法は「集合の直積」と呼ばれるものの特別な場合である．一般に集合 A の元 a および集合 B の元 b の組を $(a, b)=\{\{a\},\{a, b\}\}$ と定めると，これは性質 (P) を満たす．そのような組 (a, b) 全体の集合を $A \times B$ と表し，集合 A, B の**直積**と呼ぶ．同様に，n 個の集合の直積 $A_1 \times \cdots \times A_n$ も考えられる．

5.2 実数の相等と順序—集合上の二項関係

二つの実数 a, b に対しては，$a=b$ であるか，そうでないかが定まっている．これを実数の相等と呼ぶ．また，$a \leq b$ であるか，そうでないかが定まっている．これを実数の大小関係または順序と呼ぶ[*29]．

実数の大小関係を集合で言い表すため，直積 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ を考える．実数の組 (a, b) で $a \leq b$ を満たすもの全体の集合を Γ とおくと，これは $\mathbf{R}^2$ の部分集合である（図 5）．逆に，この部分集合 Γ から実数の大小関係 $\leq$ が復元される．

実数の大小関係は「集合上の二項関係」と呼ば

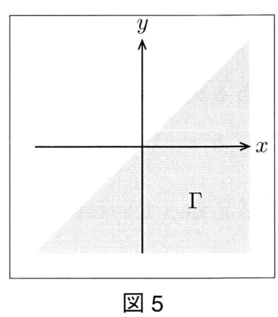


図 5

*27)　この巧妙な方法は「対角線論法」と呼ばれる論法の一つの形である．

*28)　また，すべての集合全体が集合をなさないことが分かる．

*29)　等号付き不等号 $\leq$ を基本的なものと考えて，$a \leq b$ かつ $a \neq b$ のときに $a<b$ と定める立場を取る．

れるものの特別な場合になっている．一般に集合 X の直積 $X^2 = X \times X$ の部分集合 Γ が与えられたとき，仮に記号 $\vdash$ を用いることにして $a \vdash b$ とは $(a,b) \in \Gamma$ となることと定めれば，いかなる $a,b \in X$ に対しても，$a \vdash b$ であるか，そうでないかのいずれか一方のみが定まるような規則が得られる．この種の規則を X 上の二項関係または単に**関係**と呼ぶ*30)．

例えば，自然数 m,n に対して，m が n を割り切るとき $m \mid n$ と表すが，これは整除関係と呼ばれる $\mathbf{N}$ 上の関係である．また，集合 X の部分集合 A,B に対する包含関係 $A \subset B$ や対等 $A \simeq B$ は巾集合 $\mathrm{P}(X)$ 上の関係である．

さて，関係 $\vdash$ に対する以下の性質を考えよう*31)．

(1)　$u \vdash u$ である．

(2)　$u \vdash v$ かつ $v \vdash w$ ならば $u \vdash w$ である．

(3)　$u \vdash v$ ならば $v \vdash u$ である．

(4)　$u \vdash v$ かつ $v \vdash u$ ならば $u = v$ である．

関係 $\vdash$ として相等 $=$ や対等 $\simeq$ を取れば，いずれも性質 (1), (2), (3) を満たす．一般に (1), (2), (3) を満たす関係を**同値関係**と呼ぶ．

また，大小関係 $\leq$，整除関係 $|$，包含関係 $\subset$ は，いずれも性質 (1), (2), (4) を満たす．一般に (1), (2), (4) を満たす関係を半順序あるいは単に**順序**と呼び，順序の与えられた集合を順序集合と呼ぶ．例えば，集合 X の巾集合 $\mathrm{P}(X)$ は包含 $\subset$ を併せて考えることで一つの順序集合となる．

5.3 比とは何か—同値関係による商集合

実数 a,b で $a=b=0$ でないものに対して，比 $a:b$ が考えられる．これは次の性質を持つ．

$$\text{(R)}\quad a:b=c:d \iff \text{ある実数 } \lambda \neq 0 \text{ に対して } (a,b)=(\lambda c,\lambda d) \text{ となる}$$

この性質 (R) さえ知っていれば，比 $a:b$ が何であるか知らなくても比を扱って支障はない．では比 $a:b$ は果たして実在するのだろうか．

この問に答えるため，実数の組 (a,b) であって $a=b=0$ でないもの全体の集合を X とおく．元 $(a,b),(c,d) \in X$ が (R) の右辺の条件を満たすとき，(a,b) は (c,d) に同値であると呼ぶことにしよう．このとき，元 $(a,b) \in X$ に同値な元 (x,y) 全体は，原点を通り (a,b) を方向ベクトルとする直線から原点 $(0,0)$ を除いたものである（図 6）．これを比 $a:b$ の定義として採用すれば，確かに性質 (R) が成立し，比にふさわしいものとなる．

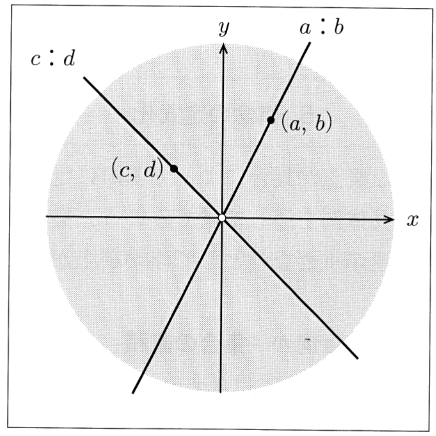


図 6

この定義によれば，比 $a:b$ は無数の点からなるが，それらを「ひとまとめ」にして一つのものと考えるのが要点である．同様に，3 個以上の実数の比や，複素数の比も考えられる．

この構成法は「同値関係による商集合」と呼ばれるものの特別な場合になっている．集合 X 上の同値関係が与えられたとし，これを記号 $\sim$ で表すことにする．このとき，$x \sim u$ となる元 x 全体の集合を u の同値類と呼び，ある元 $u \in X$ の同値類になるような X の部分集合全体の集合を同値関係 $\sim$ による X の**商集合**と呼ぶ．これは巾集合 $\mathrm{P}(X)$ の部分集合である．

身近な例で言えば，小学校で学ぶ分数すなわち非負の有理数は「自然数の比」として商集合を用いて構成される．同様に中学校で学ぶ負の数も「非負数の差」として商集合を用いて構成できるし，高

*30)　部分集合 $\Gamma \subset X^2$ を関係 $\vdash$ のグラフと呼ぶことがある．集合論的にはグラフをもって関係の定義とする．直積 $A \times B$ の部分集合を考えれば，対応や写像もグラフによって定義できる．

*31)　順に，反射律，推移律，対称律，反対称律と呼ばれる．

校で学ぶ平面ベクトルも有向線分の同値類として商集合によって理解することができる．

集合の直積を作る操作や，部分集合を取り出す操作，商集合を構成する操作は，いずれも与えられた集合から新しい集合を構成する手続きである．ここでは触れなかったが，集合の構成法を写像との関係を通して理解することも重要である[*32]．

このほかにも，直和やファイバー積など，種々の構成法があり，現代数学の随所で有効に利用されている．

6. おわりに

集合に基づく数学の研究は，19 世紀後半にデデキントとカントールによって始められ，大きな発展を遂げた．その途上でカントールは，線分 $[0,1]$ と正方形 $[0,1]^2$ が対等であるという事実を発見した（図 7）．

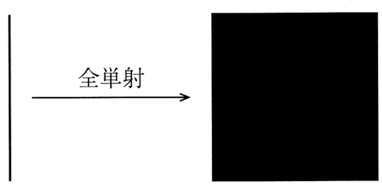


図 7

1 次元の図形である線分と 2 次元の図形である正方形のすべての点が一対一に対応するとは，発見したカントール自身がデデキントへの手紙に「信じられない」と書いたほどの驚愕である．

このような現実と感覚の乖離は，概念を正確に把握し，感覚を修正することによって解消する[*33]．というのも，線分が 1 次元で正方形が 2 次元であるという「次元」の属性は集合の概念にもともと備わっているものではないので，集合の対等を論ずるにあたって忘れる必要があったのである．

一方，感覚にあわせて概念を変更することで乖離の解消を図ることも考えられる．それには位相の与えられた集合すなわち**位相空間**を考えればよい[*34]．位相空間に対しては「連続な写像」の概念が意味を持つので，二つの位相空間が**同相**であるとは，それらの間の連続な全単射で逆写像も連続なものが存在することと定める．線分と正方形は集合として対等だが，位相空間として同相でないのである[*35]．

一般に，集合に付与することで集合とあわせて一つの概念をなすものを集合の上の**構造**と呼ぶ．例えば，集合に順序という構造を付与したものが順序集合であり，位相という構造を付与したものが位相空間である．

数学に現れる諸概念は，集合に構造を付与し，それを写像に反映させることによって記述される．また，直積や商集合などの構成法によって，さまざまな数学的対象が得られ，その研究から新たな概念が誕生する．このようにして数学は枠組みを大きく広げ[*36]，美しく豊穣な世界を形成するのである．

参考文献[*37]

1) 嘉田勝『論理と集合から始める数学の基礎』日本評論社，2008 年．
2) 斎藤毅『集合と位相』東京大学出版会，2009 年．
3) 彌永昌吉・彌永健一『集合と位相』岩波書店，1990 年．
4) 松村英之『集合論入門』朝倉書店，1966 年．

（まつお・あつし，東京大学大学院数理科学研究科）

*32) これを圏論的方法という．圏とは集合と写像について一般的に成り立つ性質を抽象化したものである．

*33) とは言え，抽象的な概念に感覚をあわせるのは非常に難しいので，緻密な論理によって数学を組立てることが欠かせない．

*34) 位相については文献 2, 3) などを参照のこと．

*35) 正確に言うと，線分と正方形にユークリッド位相を与えたものは同相でない．ただし，線分から正方形への連続な全射は存在する．

*36) カントール曰く，数学の本質は自由性にあり（1883 年）．

*37) 数学で用いられる論理については文献 1) に丁寧な解説がある．文献 2) は集合と位相の最新の教科書である．数の構成法については文献 3) が詳しい．文献 4) は 40 年以上も前の本だが，圏論的方法も取り入れられた好著である．

代数学

商対象を中心にして

松本　久義

1. はじめに

代数学とはかつては方程式論などを指したが，その後**群**，**環**，**体**などの代数的構造が導入され，**抽象代数学**などと言われた．現代においては大学の数学科などでまず代数学として学ぶ内容はこのような基本的な代数構造である．初学者向きというこの特集の趣旨から考えてこれから代数学を学ぶ人でも読めるように，主として線形代数を例にとって，代数学の初歩において基本的なことを述べてみる．以下述べることは線形代数以降に出てくる代数学の内容の中で押さえておくべきことでもある．

2. 集合論に基づく概念の記述

数学においてはきちんと論証をつけ理解することが重要であるのだが，「きちんと論証をつけ理解する」ということをどのように初学者に伝えるのかというのは教える側にとっても実は頭の痛い問題である．徹底的にやり出すと公理的集合論に行き着いてしまうが，初学者に教える場合それを持ち出すのはいいとはとても思えない．まあでも，集合論は数学の言語とも言うべきものであり，特に現代の代数学は集合論なしでは全く話が進まない．

例えば群と言う概念は3つ組 $(G, \cdot, 1)$ で G は集合，群の演算あるいは乗法 $\cdot$ は直積集合 $G \times G$ から G への写像，1 は単位元という G の特定の元というように表され，結合則や逆元の存在などのいくつかの性質を満たすものとして定義されることは群論の本に書いてある通りである．さらに群から群への写像で群の演算を保つものは**準同型**と言われるが，これは群を考える上で基本的な概念である．具体的には，**集合概念**と**写像（関数）概念**がポイントであり，それらを用いて代数学のみならず数学の種々の概念を明確に規定することができる（実は写像概念は集合概念に還元できるのであるがそういったことはさておく）．

とりあえず，この2つの概念を押さえておいて集合や写像の持つ基本的な性質を使いこなせることが必要であり，それができれば最低限文章が読めないということはないはずである．まあ代数学の本を読む前に集合と写像を徹底的にマスターするというよりは基本的なことだけ押さえておいて必要になればその都度自分で考えてみるのが実践的であると思う．何でもそうだが重要なことなら何回も出てきて自然に身に着くし，出てこないようなことなら，とりあえずどうでもいいことなのである．

また，集合論における標準的な記述を使いこなすことも重要である．例えば線形写像の**カーネル**（あるいは核）という概念があるが，それは中括弧「$\{\ ,\}$」を使う標準的な記法で，線形写像 f のカーネル $\mathrm{Ker}(f)$ を

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$

と定義することができる．こういった記述はたいていの数学の本で出てくるはずなのだが，実際には，このような集合論的な記述を身に付けていない学生を見掛ける．このような記述ができないと，他人に自分の考えを伝えるのに支障があるだけでなく自分自身の頭の中を整理するということでも大きな影響が出てくる．初学者に対するアドバイスであるが，最初のうちは数学の専門書に取り組む意義として，「内容を理解して知識を身に付ける」だけでなく「数学における，基本的な論理の組み立てや記述の仕方を身に付ける」こともあることを留意すべきである．具体的な勉強法としては，充分に注意して選んだ最初の何冊の本は単に読み流すのではなく，論理などを補って自分自身でまとめたノートを作るのを勧める．

チェックポイント

n を正整数とする．このとき n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ および複素 n 次一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の定義をきちんと書き下せ．また $\mathfrak{S}_n$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群として実現できることの証明を専門書の記述と同レベルのきちんとした書き方で書き下せ．

3. 商対象の定義

線形代数における**商空間**，群論における**商群**，環論における**商環**などの**商対象**は，代数学の初歩においては最初の山場であり，これをちゃんと理解することができれば後は知識を身に付けるだけの話と言ってもいい．もっとも，商対象をきちんと理解するということは**準同型定理**や**テンソル積**の商としての構成や群の**生成元**と**基本関係**による定義などを理解するということでもあるが．

例えば，複素ベクトル空間 V の部分空間 W での商空間 V/W は $V/W = \{x+W \mid x \in V\}$ で定義されるが，商空間の元 $x+W$ は $x+W = \{x+y \mid y \in W\}$ で定義される集合である．この集合にベクトル空間の演算が自然に定義されるのがミソで，$x+W$ と $y+W$ の V/W における和は $(x+y)+W$ で定め，複素数 a による $x+W$ のスカラー倍は $ax+W$ で定める．これらは，x や y の取り方によらずきちんと定義できている．また $0+W$ を V/W の零元とする．商空間としては集合の集合を考えているわけであるが，上でも述べたように数学は集合論を言語としているのであり，まずはこのような概念構成のやり方に慣れなければならない．

とは言うもののこの商空間の定義の本音は別のところにある．まず，注意しなければならない重要なことは商空間というのは，空間 V/W 単体で考えるものではなく**自然射影**と言われる線形写像 $p: V \to V/W$ とセットにして理解すべきものであるということである．ここで p は

$$p(x) = x + W \quad (x \in V)$$

で定義される．自然射影 p は以下のような 2 つの性質 (P1), (P2) を持っている．

(P1) p は全射である．
(P2) p のカーネル $\mathrm{Ker}(p)$ は W に一致する．

(P1), (P2) の証明はほとんど定義から明らかであろう．まず見ておくことはこの (P1), (P2) は商空間というものを実質的に特徴付けるというということである．それを見るために線形空間に対する**準同型定理**を思い起こして頂きたい．

線形空間に対する準同型定理
U をある複素ベクトル空間とし，$q: V \to U$ は線形写像で以下の性質 (P1) と (P2) を満たすとする．

(P1) q は全射である．
(P2) q のカーネル $\mathrm{Ker}(q)$ は W に一致する．

このとき，線形空間の同型写像 $r: V/W \to U$ であって，$r \circ p = q$ となるものが存在する．

ざっくばらんに言えば，準同型定理は (P1), (P2) を満たす線形写像は商空間への自然射影に同型を除いて一致してしまうことを意味している．実は商空間の定義そのものよりもこの性質 (P1), (P2) こそが商空間の本質を捉えているといってよい．

むしろ V と W が与えられたときに (P1), (P2) を満たす $q : V \to U$ を作るために, $V/W = \{x+W \mid x \in V\}$ という構成が捻り出されたというのが本音である．商空間 V/W の元が $x+W$ という形をした集合であるということは，あくまでも技術的なことであって，商空間の本質ではない．

しかしながら，この $V/W = \{x+W \mid x \in V\}$ という定義は，「商空間の本質」とは別の観点から見ると重要である．前節で，集合論の効用として，「種々の数学における概念を明確に記述できる」ということを述べたが，「与えられた条件を満たす数学的対象を構成できる」というもう一つの重要な効用があるのである．一般的に，適当な集合を設定し，その上に「与えられた条件」に対応する「同値関係」を定義し，それについての同値類の集合を考えるという構成である．この構成法は唯一無二と言えるほど強力で普遍的なものであり，上記の商空間の定義はその最も簡単なものの一つである．$V/W = \{x+W \mid x \in V\}$ においては，最初に設定された集合は V 自身であり，その上の同値関係として $x-y \in W$ を定めれば，$x \in V$ を含む同値類は $x+W$ ということになる．この同値関係 $x-y \in W$ の意味は上記 (P1), (P2) の下では $q(x)=q(y)$ ということであり，同値類は「q による行き先が一致するものをまとめたもの」ということになる．そういう意味でこの同値関係は与えられた条件 (P1), (P2) に対応している．ここでは商ベクトル空間を例に採ったが，商群や商環についても全く同様なことが言える．

商対象をちゃんと理解するということのうちには，商対象の本質が定義そのものではなくてその性質にあること（商空間の場合は上記 (P1), (P2)）を理解するとともに，集合の集合として商対象を構成する集合論を用いた強力な技巧をマスターすることも含まれているのである．

チェックポイント

H をある複素ベクトル空間とし，$f : V \to H$ は線形写像で以下の性質 (Q) を満たすとする

(Q) 任意の $x \in W$ に対して $f(x) = 0$.

このとき，線形空間の同型写像 $\tilde{f} : U \to H$ であって，$\tilde{f} \circ q = f$ となるものが一意に存在することを示せ．

4. 商空間と補空間

実は上記 (P1), (P2) を満たす $q : V \to U$ は，**補空間**を用いて作ることができる．つまり，U が W の V における補空間であるとすれば直和分解 $V = W \oplus U$ が存在するのでこの直和分解に関する第 2 成分への射影を q とすれば確かにこれは (P1), (P2) を満たしている．従って補空間を商空間の代わりに使うことは可能ということになる．しかし補空間を商空間と同じものだと思ったり，補空間ですべて済ますことには問題がある．

まず，補空間は一般にはたくさんあるので，数ある補空間のうちからある一つを選び出さねばならないということである．そうやって選んだものであるから補空間は性質 (P1), (P2) に以外に V の特定の部分空間であるという情報を持っていることになる．一方商空間の定義 $V/W = \{x+W \mid x \in V\}$ においては，構成をよくよく考えてみると性質 (P1), (P2) 以外の余計な情報が潜りこまないようになっていることが分かるであろう．つまり，補空間は商空間よりも多くの情報を持った概念であるので同等な概念ではない．

また商空間を考えずに補空間だけを考えて議論した場合，それが商空間の性質 (P1), (P2) だけを使っているのか，それとも補空間として元の空間の部分空間であることが効いているのかごちゃごちゃしてくる．従って目的に応じて商空間と補空間を使い分けたほうが明快に理解できるのである．

ベクトル空間の場合と異なり，商群や商環を考える際には，補空間のようなものは一般には取れないのでいずれにしても集合の集合として構成するしかない．

チェックポイント

V を複素ベクトル空間，W をその部分空間とする．また $p : V \to V/W$ を自然射影とす

る．線形写像 $s: V/W \to V$ が p の分裂写像であるとは，合成写像 $p \circ s$ が V/W の恒等写像になることとする．このとき W の V における補空間全体のなす集合と p の分裂写像全体のなす集合の間の一対一対応を構成せよ．

5. テンソル積

最後に初心者に分かりにくいと思われるテンソル積を取り上げてみよう．一般の環上の加群に対して定義されるものであるが，ここでは簡単のために複素ベクトル空間の場合に話を限定しておく．ベクトル空間に限ればテンソル積の定義はいくつかあるが，一般的な加群にも通用する定義は商空間として構成するやり方である．つまり複素ベクトル空間 V および W のテンソル積を以下のように定める．まず X を直積集合 $V \times W = \{(v,w) \mid v \in V, w \in W\}$ を基底とする複素ベクトル空間であるとする．さらに X の部分集合 Z を

$$Z = \{(av_1 + bv_2, w) - a(v_1, w) - b(v_2, w) \mid a, b \in \mathbb{C}, v_1, v_2 \in V, w \in W\} \cup \{(v, aw_1 + bw_2) - a(v, w_1) - b(v, w_2) \mid a, b \in \mathbb{C}, v \in V, w_1, w_2 \in W\}$$

で定め，Y を Z で生成される X の部分空間として $V \otimes W = X/Y$ でテンソル積を定めるのである．これは複雑な定義であり，初めて見る人の多くは戸惑うであろう．ここでまず注意することは，商空間は自然射影と合わせて考えるべきものであるように，テンソル積は以下のように定義される双線形写像 $\iota: V \times W \to V \otimes W$ と組にして考えられるべきものなのである．まず X の定義より直積集合 $V \times W$ は X の部分集合であるから自然射影 $p: X \to X/Y = V \otimes W$ の定義域を $V \times W$ に制限することによって得られた写像が ι である．上の Z はこの ι が双線形写像になるように定義されているのである．$v \in V, w \in W$ に

対して ι による (v,w) の像は通常，$v\otimes w$ と書かれる．

テンソル積においても定義は技術的なもので本音は次のところにある．

テンソル積の普遍性
V,W,U を複素ベクトル空間，$f:V\times W\to U$ を双線形写像とする．このとき，$\tilde{f}:V\otimes W\to U$ なる線形写像 $\tilde{f}$ で $f=\tilde{f}\circ\iota$ となるものが一意に存在する．

現実問題として，テンソル積を使う場面においては定義が問題になることはまずない．よく，線形写像 $F:V\otimes W\to U$ を $V\times W$ の生成元である $v\otimes w$ の行き先 $F(v\otimes w)$ を与えることによって定義する．セミナーでは学生に，本当にわかっているかチェックするために，これは本当に定義になっているのか聞くことがあるが，でもこれは，v, w について双線形になっていることさえ確かめられれば，テンソル積の普遍性そのものなのである．

テンソル積を考える上で重要なもう一つのことはその**関手性**である．これは要するにベクトル空間だけでなく線形写像のテンソル積がしかるべく定義されるということである．V_1,V_2,W_1,W_2 を複素ベクトル空間 $f:V_1\to V_2$, $g:W_1\to W_2$ をそれぞれ線形写像としておく．このとき線形写像 $f\otimes g:V_1\times W_1\to V_2\times W_2$ を $f\otimes g(v\otimes w)=f(v)\otimes g(w)$ で定義する．これがちゃんとした定義になっていることは注意した通りで双線形性をチェックすればよい．この構成は線形写像の合成に対して整合的に振る舞うことや f,g が恒等写像のときに $f\otimes g$ も恒等写像になることが，理論的に重要になる．

テンソル積の普遍性を少し別の形に言い換えてみよう．以下 V, W, U などを複素ベクトル空間とする．まず $\mathrm{Hom}(V,W)=\{V$ から W への線形写像$\}$ とおく．これは単なる集合ではなくて自然に複素ベクトル空間になる．また $B=\{V\times W$ から U への双線形写像$\}$ なる集合を考えよう．B はやはり自然に複素ベクトル空間になる．さて次のような自然なベクトル空間の同一視が得られることに注意する．

$$B\cong\mathrm{Hom}(V,\mathrm{Hom}(W,U)).$$

この同型は双線形写像 $f(v,w)$ に対して，「v に対して『w を $f(v,w)$ に対応させる写像』を対応させる」という写像を対応させることで得られる．一見複雑ではあるが，これは双線形写像を一変数ごとに分けて考えればどうなるかと言うことに他ならない．この同型を用いてテンソル積の普遍性を書き換えれば次のようになる．

テンソル積と Hom の随伴性
以下のような複素ベクトル空間の同型が存在する．

$$a_{V,W,U}:\mathrm{Hom}(V,\mathrm{Hom}(W,U))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(V\otimes W,U).$$

具体的にはこの同型は $f\in\mathrm{Hom}(V,\mathrm{Hom}(W,U))$ に対して $F(v\otimes w)=(f(v))(w)$ $(v\in V,w\in W)$ で定義された $F\in\mathrm{Hom}(V\otimes W,U)$ を対応させることで得られる．

上の同型で重要な点は上の同型が線形写像に対して，整合的に振る舞う（こういうことは同型が**関手的**であると言われる）である．これは以下のように述べられる．まず線形写像 $f:V_2\to V_1$ および $g:U_1\to U_2$ に対して，線形写像 $\mathrm{Hom}(f,g):\mathrm{Hom}(V_1,U_1)\to\mathrm{Hom}(V_2,U_2)$ を $\mathrm{Hom}(f,g)(F)=g\circ F\circ f$ で定める．1_W で W 上の恒等写像を表すと同型が関手的であるということは，以下のように述べられる．

$$\mathrm{Hom}(f,\mathrm{Hom}(1_W,g))\circ a_{V_1,W,U_1}=a_{V_2,W,U_2}\circ\mathrm{Hom}(f\otimes 1_W,g).$$

普遍性はテンソル積に限らず様々な数学的な対象について考えられ，多くの場合その概念の肝となっている．さらに普遍性は，多くの場合より洗練された概念である**随伴関手**という概念に言い換えることができ，重要な代数学における考え方として広く使われている．

チェックポイント

3重テンソル積 $V \otimes W \otimes U$ の定義と普遍性を定式化し，それを用いてテンソル積の結合則 $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$ を示せ．

6. 文献案内

私が知っている範囲内で，初学者に勧められる本について最後に触れたい．

近藤　武,『群論』(岩波基礎数学選書), 岩波書店, ISBN: 978-4000078078.

入門的な事項から始まり，後半はかなり専門的な内容まで書かれている．特に最初の3分の1の入門的な部分はわかり易いと思う．後半部分は特に興味がない限りは読まなくてもいいとは思う．

M. Atiyah and I. G. MacDonald, "Introduction To Commutative Algebra", Westview Press; ISBN: 978-0201407518.

可換環論はブルバキや松村などの名高い本がいくつかあるが，とりあえず代数幾何などを専門にしないのであればこの本を読んでおけば十分とは言える．

J.P. セール,『有限群の線型表現』, 岩波書店, ISBN: 978-4000060615.

有限群の表現論の本としてはこれを挙げておく．表現の既約分解の取扱いが類書に比べて丁寧に書かれている．

藤崎源二郎,『体とガロア理論』(岩波基礎数学選書), 岩波書店, ISBN: 978-4000078139.

標準的な内容でしっかりと書かれていると思う．

James E. Humphreys, "Introduction to Lie algebras and representation theory", Springer-Verlag, ISBN: 978-0387900537.

リー代数の教科書としては標準的なものである．表現論を大学院などで学びたい学生は学部のうちにこの本のレベルのリー代数の本を読んでおくことを勧める．

S. マックレーン,『圏論の基礎』シュプリンガー・ジャパン, ISBN: 978-4431708728.

カテゴリーについての定番的教科書

河田敬義,『ホモロジー代数』(岩波基礎数学選書), 岩波書店, ISBN: 978-4000078047.

ホモロジー代数は初学者向けと言うわけではないが入門的なことを学習した後に学ぶものではある．実用的に役に立つ形で書かれているとなると層なども取り扱えるアーベル圏を基礎においた，ホモロジー代数ということになる．この本はリーズナブルな分量で，見通し良くとりあえず多くの場合に必要な知識がまとめられている．なおスペクトル系列については，代数の本でないが，

R. Bott, L. W. Tu, "Differential Forms in Algebraic Topology", Springer ISBN: 978-0387906133.

が分かりやすい（邦訳あり）．

I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, "Elements of the representation theory of associative algebras. Vol.1. Techniques of representation theory". London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, ISBN: 978-0-521-58423-4.

現代的な観点から書かれた非可換代数の表現論の教科書である．巻末に必要な圏論などの知識がまとめてある．

（まつもと・ひさよし，東京大学大学院数理科学研究科）

ルベーグ積分は難しいか？



植田　好道

1. はじめに

大学で学ぶ数学の中でも「ルベーグ積分」と呼ばれる科目は学生たちの間で難しいとされているようです．数学ですから（!）難しいのは当り前なのですが，本当に難しいのでしょうか？ ルベーグ積分論には様々なアプローチがありますが，ここでは標準的と思われるものに従います．

2. 積分＝面積，体積？

非負連続関数 $f(x)$ を取り，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x)\}$ とおくと

$$\int\int_D 1\,dxdy = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.1}$$

が成り立ちます．ちょっと意地悪な質問ではありますが「これを示せ」と言われたらどうしますか？ 左辺の積分は底面が D で高さが 1 の立体の体積だから D の面積になって，右辺の積分は $y = f(x)$ のグラフと区間 $[a,b]$ が定める図形の面積を表すのだから D の面積に他ならない．ゆえに等号が成り立つ，と答えるかもしれません[*1]．ところで，そもそも面積や体積って何なのでしょうか？ 実は，微分積分の範疇では本質的に面積や体積を表立って議論することを避けているように見えます．積分を定義してその値を面積だとか体積と呼んでいるのです[*2]．

*1）計算している量が何を意味しているかがわかる，という観点からは 100 点満点．しかし，論理的に証明する，という観点からは何もやっていません．

3. 測度の概念

多くの数学の分野と同じく，ルベーグ積分でも公理化の手法が利用されます．公理化，というのは初学者が躓きやすいものと思うのですが，これを避けては通れません．公理化とは平たくいえば，考察したい「もの」が満たすべき性質を列挙し，それらの性質を満たすものを○△□と呼ぶ，ということから出発する手法です．この手法の利点の 1 つは，「あるかないか」を別の問題にすることができる点にあります．

どのような概念にもその出所と言うべきものがあります．測度の概念も例外ではありません．我々の直感として頭の中にある長さや面積や体積がそれに当たります．ここでは簡単のために面積を考えます．面積とは平面上の「領域」に対して定めるものなので xy-平面内の部分集合に対して非負実数を対応づける操作であるべきだ，ということはお判りでしょう．面積であるならば満たしてほしい性質がいくつかあります．例えば，xy-平面内の部分集合たち $B_1, \ldots, B_n$ が互いに共通部分を持たないならそれらの和集合 $\bigcup_{i=1}^n B_i$ の「面積」は B_i の「面積」たちの和になっているべきです

*2）微分積分では (2.1) の左辺で D の面積を定めます．

し，空集合 $\emptyset$ の「面積」はどう考えても 0 であるべきでしょう．このように言葉だけで議論を進めるのは面倒です．xy-平面 $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 B に対してその「面積」を $m(B)$ と書くことにしましょう．上で述べた「面積」$m(B)$ が満たすべき性質は次のようになります．

(M1) $m(\emptyset)=0$.

(M2) $B_i\cap B_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ ならば $m(\bigcup_{i=1}^n B_i)=\sum_{i=1}^n m(B_i)$.

次が一種の論理の飛躍なのですが，2 つ目のものをあえて無限和集合まで許して

(M3) $B_i\cap B_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ ならば $m(\bigcup_{i=1}^\infty B_i)=\sum_{i=1}^\infty m(B_i)$,

としてみます．こうする理由の 1 つは，極限との親和性の追求です．上の (M1) と (M3) の性質を満たすものを**測度**と呼びます．

これで測度が何かがわかった，というのはちょっと言い過ぎです．というのも，現在の数学では集合と写像の概念であらゆるものを定式化します．すると，測度もそのように定式化しなければなりません．面積の場合で言えば，$\mathbb{R}^2$ の部分集合すべてが定義域で非負実数に値をとる関数（写像）$B\mapsto m(B)$ とすれば良い，と思われるかもしれません．これで済めば話は簡単なのですがそうはいきません．「面積」であるためにはさらに，$B=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,a_1<x\leqq b_1, a_2<y\leqq b_2\}$ に対して $m(B)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)$ であるべきです．平行移動しても「面積」は変わらない，なんていう性質も成り立ってくれないと困ります．先に測度の公理として述べた (M1), (M3) に加え，今述べた性質を満たすようなものを $\mathbb{R}^2$ の部分集合全体を定義域とするように構成できないことが知られています*3)．すると，測度の定義域となるべきものを定式化する必要が生まれます．すなわち，測度を測ることのできる部分集合全体，というべきものを定式化する必要が生まれるのです！

*3) すなわち，我々の想像を絶するような複雑怪奇な集合が「ある」というわけです．

測度を測ることのできる部分集合全体を $\mathfrak{B}$ としましょう．性質 (M3) を考えると，測度を測ることができる部分集合の（無限）和集合も測度が測れないと困ります．同じく $\emptyset\in\mathfrak{B}$ も要ります．さらに，ある集合の「面積」を測ることができればその補集合も「面積」が測れてしかるべき，と思うでしょう．以上の 3 つの性質を満たす部分集合の族を **σ-集合体**（σ-集合族，σ-加法族 etc.）と呼びます．すなわち，測度だけでなく，その定義域に当たるものも公理化の手法で定めるのです．

定義 3.1 X を集合とする．X の部分集合の集まり $\mathfrak{B}$ が σ-集合体であるとは
- $\emptyset\in\mathfrak{B}$,
- $B\in\mathfrak{B}\implies B^c\in\mathfrak{B}$,
- $B_1,B_2,\cdots\in\mathfrak{B}\Longrightarrow\bigcup_{i=1}^\infty B_i\in\mathfrak{B}$

を満たすことをいう．このとき，組 $(X,\mathfrak{B})$ を**可測空間**と呼ぶ．μ が可測空間 $(X,\mathfrak{B})$ 上の測度であるとは，写像 $\mu:\mathfrak{B}\to[0,+\infty]$ で
- $\mu(\emptyset)=0$,
- $B_i\cap B_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ ならば $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty B_i)=\sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$,

の 2 条件を満たすことを意味する．この 3 つ組 $(X,\mathfrak{B},\mu)$ を**測度空間**と呼ぶ．

ここで，可測空間および測度の実在を問題にしていないことに注意してください．あるかないかもはっきりしないものをいくつかの性質を満たすもの，と規定して議論を進めようとしているのです．すると次の疑問が生じるでしょう？

(Q1) 可測空間とか測度なんてものがあるのか？我々の頭にある「面積」はそういうものなのか？

(Q2) 「面積」や「体積」が測度であったとしても，わざわざ測度という概念を導入する意味は何か？

まず，疑問 (Q1) に答えます．かなり面倒な議論になるのですが，すべての半開区間 $(a,b]$ を含む $\mathbb{R}$ の部分集合のなす σ-集合体 $\mathfrak{M}_1$ と，$m_1((a,b])=b-a$ を満たす測度 $m_1:\mathfrak{M}_1\to[0,+\infty]$ を構

成することができます．これは「長さ」の概念の厳密な定式化に当たります．この $\mathfrak{M}_1$ が $\mathbb{R}$ のすべての部分集合を含んでいれば話は簡単なのですが，現在の数学が採用する自然な公理系の下ではそうではないことが厳密に証明されてしまいます．同じ調子で可測空間 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{M}_2)$ と測度 $m_2 : \mathfrak{M}_2 \to [0, +\infty]$ も構成できます．$\mathfrak{M}_2$ はすべての $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ を含む σ-集合体であり，m_2 は $m_2((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ を満たします．数学では，2 次元 3 次元以上の「n 次元」の空間も同じ調子で考えますから，n 次元の可測空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n)$ と測度 $m_n : \mathfrak{M}_n \to [0, +\infty]$ も全く同じ調子で構成できます．この測度 m_n が **n 次元ルベーグ測度**というもので，「長さ」，「面積」，「体積」（およびそれらの高次元への一般化）を数学的に厳密に定式化したものです．

次に疑問 (Q2) を考えてみましょう．直感として頭の中にある「面積」を出発点に，それが満たすべき性質を考察して測度の概念に到達しました．では，「面積」を「確率」に置き換えるとどうなるでしょうか？ 今，さいころ投げでも何でも良いのですが，確率試行を考えます．その標本空間を Ω と書きましょう．確率は各（確率）事象に対して付与されるものですが，事象は標本空間 Ω の部分集合として捉えることができます．例えば，1 個のさいころを投げる確率試行であれば，標本空間は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり，例えば奇数の目が出る事象を $\{1, 3, 5\}$ という部分集合として認識するのです．互いに背反な事象というのは，事象を表す部分集合が互いに共通部分を持たない，ということに他なりません．この調子で考えて行くと，「確率」も「面積」が満たすべき性質 (M1), (M2) を満たすべきであるということがわかります．ゆえに，確率の概念も数学的には可測空間だとか測度の概念を用いて定式化すると都合が良い，ということになります．これを明確に宣言したのはコルモゴロフ[4)]で 1933 年のことです．ルベーグ積分が現れるのはその少し前です．

定義 3.2 集合 Ω とその部分集合のなす σ-集合体 $\mathfrak{B}$ が与えられていて，可測空間 $(\Omega, \mathfrak{B})$ 上の測度 $\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ を満たすとき，$(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ を**確率空間**と呼び，$\mathbb{P}$ を**確率測度**と呼ぶ．

我々が素朴に「確率」という言葉を使うときには，具体的な確率試行を念頭においているものです．他方で，確率空間の概念には確率試行に当たるものは何処にもありません．「確率」が何処から来るのか？ はとても難しい問題で，数学を超えて哲学的な問題になりかねません．それを避けるために確率試行なるものを排除したわけです．公理化の利点の 1 つとして，存在問題を別の問題にできることだ，と述べました．確率の数学的な定式化はそれがうまく行った一例です．

4. ルベーグ（式）積分とは何か？

まず微分積分での積分（**リーマン式積分**と呼びます）について簡単に振り返りましょう．$f(x)$ を区間 $[a, b]$ 上で定義された関数とします．簡単のために $f(x) \geqq 0$ が成り立っているとします．このとき，リーマン式積分は

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

により定めます．ここで Δ は $[a, b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を，$|\Delta|$ は分割の小区間の最大幅 $\max\{|x_i - x_{i-1}| \mid i = 1, \ldots, n\}$ を表します．また，x_i^* は小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内の数です．この定義が ‘well-defined’ であることにはしかるべき議論が必要ですが，少なくとも $f(x)$ が連続であれば大丈夫です．

ところで，なぜ定義域のほうを分割しないといけないのでしょう？ ここで発想の転換です！ 定義域ではなくて値域のほうを分割して極限を取ってみましょう．すると，$f^{-1}([y_{i-1}, y_i)) := \{x \in [a, b] \mid y_{i-1} \leqq f(x) < y_i\}$ なる $[a, b]$ の部分集合の「長さ」が必要になります．頭に浮かぶ関数は大抵きれいなグラフをしているものなので気にならないと思いますが，一般の関数では何でもありです．すなわち，一般には $f^{-1}([y_{i-1}, y_i))$ は大変

複雑な集合になっていても不思議ではありません．少なくとも区間になっている保証は何処にもありません．しかし我々には「長さ」の概念の厳密な定式化である1次元ルベーグ測度の概念があります．これを使いましょう．すなわち，

$$\lim_{|\Delta'|\to 0}\sum_{i\geqq 1} y_i^*\, m_1(f^{-1}([y_{i-1}, y_i))) \qquad (4.1)$$

により積分を定義することを考えるのです．ここで，Δ' は $[0,+\infty)$ の小区間への分割 $y_0 := 0 < y_1 < y_2 < \ldots$ を表し $|\Delta'|$ は小区間の幅の「最大値」とします．また，$y_i^* \in [y_{i-1}, y_i)$ です．ここで，いくつもの困難が生じたことに気付くでしょうか？

(Q3) $f^{-1}([y_{i-1}, y_i)) \in \mathfrak{M}_1$ なのか？

(Q4) 総和 $\sum_{i\geqq 1}$ が無限和になっているので収束の問題が2度起こっている．大丈夫か？

(Q5) y_i^* の取り方に依存しないのか？

問題 (Q3) はどうしようもないので，考察の対象の関数としてそれを満たすものに限定します．すなわち，任意の $a < b$ に対して $f^{-1}([a,b)) \in \mathfrak{M}_1$ が成り立つものだけを考察することにします．この性質を満たす関数のことを **$\mathfrak{M}_1$-可測関数**と呼びます．問題 (Q4) の「半分」は極限に親しんだことのある人なら簡単です．すべての i について $y_i^*\, m_1(f^{-1}([y_{i-1}, y_i))) \geqq 0$ ですから，この無限和は $+\infty$ に発散するか収束するかのいずれかしか起こりません．ゆえに，問題は (Q4) の「残り半分」である極限 $\lim_{|\Delta'|\to 0}$ の存在と (Q5) です．ここで，もしこれらの問題が肯定的であったとしたら何が起こるか？ ということを考えてみます．肯定的であったとしたら，分割 Δ' は特別な形のものを考えれば十分でしょうし，y_i^* も特別な選び方で十分でしょう．このように考えて，非負可測関数 $f(x)$ の**ルベーグ式積分**を

$$\int_{[a,b]} f(x)\, m_1(dx)$$
$$:= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^n}\, m_1\left(f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right) \qquad (4.2)$$

と定めます．ここで，右辺が単調増加列の極限になっていることに気付くでしょうか？ 単調増加列の極限は収束するか $+\infty$ に発散するかのどちらかで単純です．また，積分区間が $[a,b]$ であることを何処にも使っていないことに注意してください．何処にも使ってないと言いましたが，$[a,b] \in \mathfrak{M}_1$（これは前節で述べたように大丈夫）であることは必要です．そうでなければ，恒等関数 $f(x) \equiv c$ の積分が定まらなくて困ります．しかし，そのこと以外に必要なことがありません．すなわち，$[a,b]$ という（有界閉）区間ではなく，開区間でも良いし $\mathbb{R}$ 全体のように無限に広がったものでも同じ調子で考えることができます．これは，リーマン式積分とは大違いで，そこでは積分区間は有界閉区間 $[a,b]$ でなければなりません．微分積分では $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ のような無限に伸びた積分区間を考えるときは「広義積分」なる処方箋でその場をごまかします．

さて，我々はルベーグ式積分なるものを (4.2) により定めましたが，そこへの道中で (4.1) に関していくつかの問題点が克服できたとしたら，という冒険を犯しました．議論の詳細まで踏み込むのはここでは不可能ですから，冒険はしかるべき議論により冒険ではないことがわかる，とだけ言っておきましょう．

ところで，我々はルベーグ式積分なるものの前にリーマン式積分を持っています．微分積分をかじったことがある方ならお判りのようにとても便利で我々の直感に合う計算結果を与えてくれます．そうなのに本当に新しい積分を考える必要があるのでしょうか？ さらに，微分積分で培った積分の知識をルベーグ積分 $\int_{[a,b]} f(x)\, m_1(dx)$ はうまく継承してくれるのでしょうか？ 第一の疑問はちょっと難しいので次の節に回して，第二の疑問を考えましょう．しかるべき議論は必要ですが，非負関数 $f(x)$ に対して，リーマン式積分を考えることができればルベーグ式積分も考えることができて（すなわち，$f(x)$ は少なくとも $\mathfrak{M}_1$-可測関数），

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,m_1(dx)$$

が成り立つことが証明できます．すなわち，ルベーグ式積分はリーマン式積分の拡張になっているのです．と言っても，ここまで考察を非負関数に制限して考えてきました．しかし，積分は非負とは限らない関数に対しても考察します．ルベーグ式積分では非負とは限らない関数に対して，次のように考えます．与えられた関数に対して $f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ と定めます．このとき，$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ であり，$f_+(x)$, $f_-(x)$ 共に非負関数です．$f(x)$ が $\mathfrak{M}_1$-可測であることと $f_+(x)$, $f_-(x)$ が共に $\mathfrak{M}_1$-可測であることは同値です．ゆえに，$f(x)$ が $\mathfrak{M}_1$-可測であるとき，

$$\int_{[a,b]} f(x)\,m_1(dx)$$
$$:= \int_{[a,b]} f_+(x)\,m_1(dx) - \int_{[a,b]} f_-(x)\,m_1(dx)$$

と定めましょう．数式で書いてしまうとうまく定まった気がするかもしれませんが，実は注意が必要です．非負関数の積分は $+\infty$ の値を取る可能性がありますから右辺が $(+\infty) - (+\infty)$ となっている可能性があります．これを合理的に定めるのは不可能です．そこで，右辺に現れる 2 つの非負関数のルベーグ式積分が有限のときに限って考えることにします．この有限性条件は $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ に注意すると

$$\int_{[a,b]} |f(x)|\,m_1(x) < +\infty$$

と簡潔に書くことができます．これが成り立つとき，$\mathfrak{M}_1$-可測関数 $f(x)$ が m_1-**可積分**であると言います．

さて，(4.2) 式は $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_1, m_1)$ を一般の測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ に置き換えてもそのまま有効であることがわかります．すなわち，ルベーグ式積分は一般の測度空間に対して考えることができます．もちろん，確率空間に対してもルベーグ式積分を考えることができます．これは**期待値**の概念の厳密な定式化に他なりません．

定義 4.1　測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を考える．X 上で定義された関数が $\mathfrak{B}$-可測であるとは，任意の $a < b$ に対して $f^{-1}([a,b)) \in \mathfrak{B}$ を満たすことを言う．X 上の非負 $\mathfrak{B}$-可測関数 $f(x)$ に対してルベーグ式積分を

$$\int_X f(x)\,\mu(dx)$$
$$:= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n}\,\mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right)$$

と定義する[*4)]．この右辺は $+\infty$ を許して必ず定まる．非負とは限らない $\mathfrak{B}$-可測関数 $f(x)$ に対して $|f(x)|$, $f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ はすべて $\mathfrak{B}$-可測になり，

$$\int_X |f(x)|\,\mu(dx) < +\infty$$

を満たすとき，$f(x)$ は μ-可積分であるといい，

$$\int_X f_+(x)\,\mu(dx) - \int_X f_-(x)\,\mu(dx)$$

が有限確定する．この値を $\int_X f(x)\,\mu(dx)$ と書き，μ-可積分関数 $f(x)$ のルベーグ式積分と呼ぶ．

ようやくルベーグ式積分が定義されたわけですが，線型性などの基本的事実を示すのにどのような教科書でもそれなりのページ数を費やしているものです．退屈な議論ですが理論を構築するには仕方のないことです．

5. なぜルベーグ式積分なのか？

「なぜルベーグ式積分なのか？」に対する積極的な理由を知るには運用してみるしかありません．そのためにはいくつかの定理が必要です．**単調収束定理**，**（ルベーグの）有界収束定理**がその代表的なものです．また，冒頭の (2.1) 式に関係する

*4)　$\sum_{k=1}^{\infty}$ を $\sum_{k=1}^{n2^n-1}$ とする代わりに $n\mu(f^{-1}([n,+\infty)))$ を加えて極限をとる本もあります．また，このような特殊な極限を使って定義するのを嫌い，一見異なる定義を採用する本もあります．理論ができてしまえばどうやっても同じことがわかります．

フビニの定理も必要不可欠です．さらに，**ラドン・ニコディムの定理**も重要です．これらを上手に使う練習をすれば「なぜルベーグ積分なのか？」という問いに対する答えを得ることができると思います．

ここで，ルベーグ積分の簡単な演習問題を出してみましょう：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

を証明してください．左辺，右辺ともに微分積分の範疇で取り扱うことのできる積分ですが，有界収束定理の演習問題です．少なくとも普段の私は微分積分の範疇でこれを示そうと思いません．

あと，ルベーグ積分では「**ほとんどいたる所で** (almost everywhere = a.e.)」という概念が大切です．ちなみに，同じ概念を確率論では「ほとんど確かに (almost surely = a.s.)」と言うのが一般的です．いずれにしろこの概念に慣れることも必要不可欠です．

以上の事柄の習得には，ルベーグ積分に引き続き**フーリエ解析**，**関数解析**，**確率論**などの分野を学ぶのがよいと思います．自然とルベーグ積分の練習になるでしょう．

ここでルベーグ積分を学ぶのに適当な本を４冊挙げましょう*5)．手元に置く本は丁寧かつ詳細な本が良いでしょう．ゆえに比較的最近の教科書[5]は勧められる１冊です．この本がちょっと冗長だというなら，これまた比較的最近の教科書[3,6]（前者は前半部分がルベーグ積分論，後半は確率論）が良いかもしれません．また古いものですが，関数解析の本[2]の第３章は要領の良いルベーグ積分の概説（教科書ではない）になっています．

6. まとめ：ルベーグ積分は難しいか？

予定調和な終わり方としては「ルベーグ積分はそれほど難しくない」で締めくくるべきでしょうが，正直，ルベーグ積分（の習得）は難しいです．その一般論をまじめに追っかけるのはそれなりの忍耐が必要です．また，有用性を知るには運用面の練習が不可欠です．運用にはしっかりとした微分積分の知識が必要です．なぜなら，具体的な積分計算は微分積分の範疇で行い，ルベーグ積分はそこへの帰着のために利用するのが普通ですから*6)．まずは基礎理論の部分を認めて運用の練習をすれば良い，というのはよく言われることですが，それほど単純ではないようです．けれども，完全にわかるまで使わない，というのは困りものです．どんなことにもバランス感覚が大切ということでしょうか？

個人的なことを言えば，面積を一般化した測度を定式化することから厳密に理論を組み立てていく過程に爽快さを感じた記憶が残っています（ただし，当時も今もルベーグ積分が「ちゃんとわかっている」という自信はありませんが…）．これは私の特殊事情かもしれません．けれども論理だけを頼りに一歩一歩組み立てる，というのは数学の醍醐味の一面であることは間違いありません．そのような醍醐味を味わうのが簡単なわけがありません．また，極めて有用な理論であることも間違いありません．読者の（特に学部２，３年の）皆さんが忍耐強くルベーグ積分に挑戦されることを祈って終わりにしましょう．

*5) もちろん，他にもよい本はたくさんあります．私は学生のときこれらとは違う本[1]で勉強しました．

*6) すなわち，微分積分を習得せずにルベーグ積分を学ぶのは無意味！

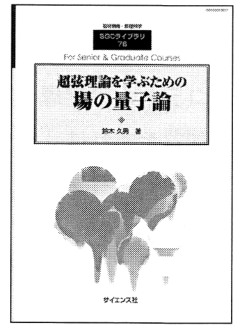
参考文献

1) 伊藤清三，『ルベーグ積分入門』，裳華房．
2) 加藤敏夫，『復刊 位相解析―理論と応用への入門―』，共立出版．
3) 小谷眞一，『測度と確率』，岩波書店．
4) A.N. コルモゴロフ，『確率論の基礎概念』，ちくま学芸文庫．
5) 盛田健彦，『実解析と測度論の基礎』，培風館．
6) 吉田伸生，『ルベーグ積分入門―使うための理論と演習―』，遊星社．

（うえだ・よしみち，九州大学大学院数理学研究院）

超弦理論を学ぶための場の量子論

鈴木久男著，B5 判，200 頁，本体 2095 円，サイエンス社



この一風変わったタイトルで，本書を手に取った方も多いに違いない．しかしおそらく，手に取った理由は，次のような理由であろう：「場の量子論の日本語の教科書は，現在ではいくつか良いものが存在しているが，『超弦理論を学ぶための』との題目で，果たして他の場の量子論の教科書と区別しうるだけの内容構成になっているのだろうか？」―本書を読み進めると，実はこの問いそのものが間違っていたことに気づく．実のところ，本書が他の教科書と全く異なっているのは，内容構成についてではない．書かれているその観点なのである．そして，それがタイトルに体現されているのである．

目次を見ると，シュレーディンガー方程式から始まって量子力学の復習，最後は素粒子標準模型とその拡張である大統一理論，まで到達しており，スリムなボリュームの一冊（全 189 ページ）であるのに網羅的にかつコンサイスに場の量子論を学べる書としても価値が高いと言えるだろう．超弦理論は，素粒子標準模型の困難を解決する理論候補であるため，そもそも場の量子論を使う素粒子標準模型を理解せねば超弦理論を学ぶ動機が理解できない．そのことはまえがきでも触れられている．従って，超弦理論を学ぶスターティングポイントを提供するという目標は，コンサイスさと網羅的であることの両方が要求される目標であり，本書はその点で成功している．解説される内容は，量子力学，相対論，スカラー場の量子化，フェルミオン場の量子化，ゲージ場の量子化，繰り込み，対称性の破れ，非可換ゲージ理論，素粒子標準模型，大統一理論．内容構成は，場の量子論の教科書のスタンダードな内容を網羅している．

しかし，本書の魅力は，目次をざっと見て伝わるものでは全くないことに注意していただきたい．目次をよく見ると，ほとんどすべての目次タイトルに「？」がついていることに気づくはずだ．例えば，「6.4 フェルミオンの経路積分はどのようにしたらいい？」といった調子である．これは，読者の興味を引くためではない．本書は，読者の立場に立った観点で書かれているのである．

本書を読み進めると，至る所で，読者の立場に立ったコメントが見受けられる．教科書の観点が全く新しいのである．通常の教科書は，事実の羅列が論理的に書き連ねられている．その一方で，なぜそれを学ばなければいけないのか，歴史的にどのようにそれが発見されて現在の研究状況はどうであるのか，論理が難しくつまずきやすい箇所はどこなのか，後で頻繁に使う概念はどれなのか，分からなければ前に戻ってみるべきなのか，などといったことが全く書かれていない．古い教科書ほどそうであろう．読者には，教科書を何度も何度も読むことが強制され，それに耐えた読者のみが，全体の流れと論理の必要性を理解できるという栄冠を手にするのである．しかし，本書は違う．全く読者の観点に立った記述がなされ，随所で上記の疑問がことごとく解明される仕組みになっているのである．

「もしガンマ関数などが苦手で面倒だと感じたら，後に必要になる時まで後回しにしてもかまわない」，「一般相対論に慣れていない読者はこの部分は大変わかりにくいだろう．でも気にしないでいただきたい．分かりにくい場合には…」，「間違っている！などと思う人もいると思う．しかし，このような発散が気に入らない！という人こそ弦理論を研究する必要があるのである．」

さらに面白いコメントも満載である．研究者としての著者の考え方や経験を明らかにし，読者との距離を縮めることで，心理的な障壁を下げている．「マニア同士の冗談話以外で日常用いるとかなり変な人だとばれてしまう危険性があり，」のくだりなど，専門性の高さを逆手に取って読者に異分野との違いを訴えており，引き込まれてしまう．いや，これ以上，本書のネタばらしをしてしまうのは止めよう．著者のメッセージは情熱的である．本書の結びの言葉にそれが集約されている：「そして将来，超弦理論においてこの独創的な発想をすることになるのは，この本を読んでいるあなたかもしれないのである．」

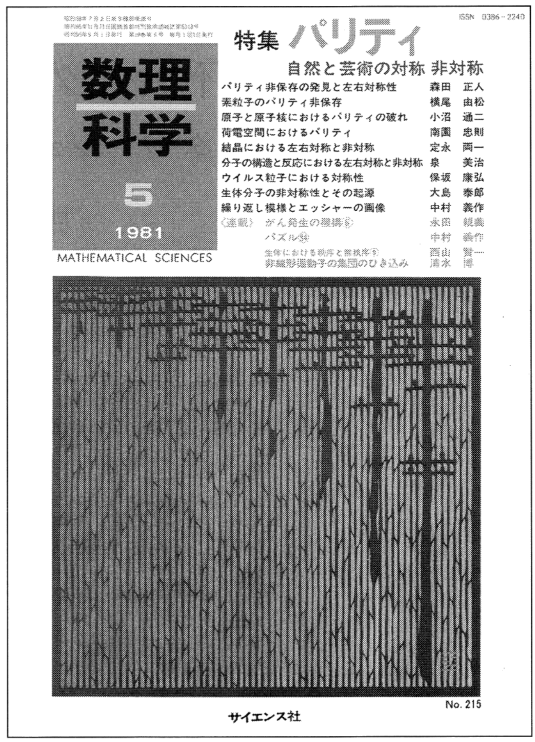
橋本　幸士（理化学研究所仁科加速器研究センター）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

小沼 通二

1981年5月号



素粒子の弱相互作用の反応におけるパリティ非保存の可能性が指摘されたのは1956年のことであり，1957年の初めまでのベータ崩壊とミュー粒子崩壊の実験によって確認された．これらの反応では，空間反転（P）と粒子・反粒子変換（C）のそれぞれに対して不変性が破られていたが，これらを重ねたCP変換に対しては不変性が保たれていた．

1964年には，K^0 崩壊においてCPの破れが発見された．CPの破れの原因について，小林誠と益川敏英の理論が出されたのは，1973年だった．

弱相互作用と電磁相互作用の統一理論を，ワインバーグとサラムが提出したのは1967年だったが，実験結果の混乱もあって，次々に修正理論が出された．1978年に東京で開催された高エネルギー物理学国際会議の総括報告において，南部陽一郎は「最近の数カ月の発展によってワインバーグ・サラムの模型が … 生き残る唯一のものだと思われるに至っています」と述べ，その後で標準理論と呼ばれるようになった．

自然の中には，対称性を持つものが人類誕生以前から存在している．芸術の中にも，対称性あるいは対称性の破れが取り入れられた．科学においても，結晶構造の分析など古くから対称性が注目されてきた．

30年前の物理，化学，生物，芸術にわたる特集「パリティ—自然と芸術の対称非対称」は，このような段階を踏まえて，森田正人を中心にして作られた．この中で私は，パリティを保存している電磁相互作用による原子の反応と強相互作用による原子核の反応にあらわれる弱相互作用の影響について解説した．

本誌は，これ以前にも関連するテーマとして「シンメトリー」(1972年6月)，「右と左」(1976年5月）を特集として取り上げ，この後も，「右巻き左巻き」(1981年10月)，「力の統一理論」(1984年7月)，「保存則と破れ」(1988年11月)，…，「力の統一にむけて」(2010年8月)，「南部陽一郎」(2010年9月）と，今日まで特集で取り組み続けてきた．

1963年の創刊以来，本誌は広範囲のテーマについて特集を提供し続けてきたが，今日見直しても新鮮で魅力あるものが少なくない．

30年ごとに区切って数理科学の歴史をみると，どの30年間にもそれぞれ素晴らしい飛躍が続出してきた．これからも，次の世代の人たちが活躍し，本誌が大きな発展を見せてくれることを期待している．

（こぬま・みちじ，神奈川歯科大学）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学
第6回

平坦で不変なダイバージェンスは何か
KLダイバージェンスと α ダイバージェンス

甘利 俊一

これまでに，不変なダイバージェンスと，凸関数から導かれるダイバージェンス（Bregmanダイバージェンス）を調べた．凸関数から得られるダイバージェンスは双対平坦な幾何学を導く．また確率分布の S_n にあっては，不変なダイバージェンスは f ダイバージェンスであり，ここからFisher情報行列が計量として導かれることも見てきた．では，不変でしかも平坦という，両方の性質をもったそんな良いダイバージェンスはどんなものだろうか？ 今回はこれを確率分布空間 S_n および正測度空間 M_n で確かめる．

6.1 確率分布空間における不変で双対平坦なダイバージェンス

離散確率分布空間 $S_n=\{\boldsymbol{p}\,|\sum p_i=1,\ p_i>0\}$ を考える（実数上の確率密度関数の空間 $S=\{p(x)\}$ を考えても，数学的なややこしい話を無視しさえすれば結果は同様に成立する）．分解可能で不変なダイバージェンスは，一変数の凸関数 f を用いる f ダイバージェンス

$$D_f[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}]=\sum_{i=0}^{n}p_i f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \tag{6.1}$$

であった．一方，ベクトル $\boldsymbol{p}$ の凸関数 $\varphi(\boldsymbol{p})$ が与えられたときに，そこから導かれるダイバージェンスは

$$D_\varphi[\boldsymbol{q}:\boldsymbol{p}]=\varphi(\boldsymbol{q})-\varphi(\boldsymbol{p})-\nabla\varphi(\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}) \tag{6.2}$$

である．ただし，ここでは座標系 $\boldsymbol{p}$ として，$(p_1,\cdots,p_n)$ を考えている．φ から導かれるダイバージェンスの場合には，ここからLegendre変換を介して双対平坦な空間が導かれる．すなわち，座標系として用いる $\boldsymbol{p}$ が平坦性を定義し，これがアファイン座標になる．一方，Legendre変換で導かれる双対座標

$$\boldsymbol{p}^* = \nabla\varphi(\boldsymbol{p}) \tag{6.3}$$

が双対平坦性を定義し，これが双対アファイン座標になる．

f ダイバージェンスは不変ではあるが，そこから得られる幾何学は一般には双対平坦にならない[*1]．しかし，f ダイバージェンスの中にも，Bregman ダイバージェンスの形で書けるもの，すなわち双対平坦性を与えるダイバージェンスがある．前に見たが，S_n は指数型分布族

$$p(x, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum \theta_i \delta_i(x) - \psi(\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{6.4}$$

の形に書けて，双対平坦になっていた．このときに使った平坦性を定義する凸関数は，$\theta_i = \log(p_i/p_0)$ という座標系を用いて

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = -\log\left(1 + \sum_{i=1}^{n} e^{\theta_i}\right) \tag{6.5}$$

である．双対ポテンシャル関数は

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=0}^{n} p_i \log p_i \tag{6.6}$$

で，負のエントロピーであった．不変で平坦とは良いことずくめである．

ここで KL ダイバージェンスを考えてみよう．

$$KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \sum_{i=0}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \tag{6.7}$$

であるから，これは

$$f(u) = -\log u \tag{6.8}$$

とおいた f ダイバージェンスである．しかし，$\varphi(\boldsymbol{p})$ から得られる Bregman ダイバージェンスを計算していくと，これは

$$D_\varphi[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \varphi(\boldsymbol{p}) - \varphi(\boldsymbol{q}) - \nabla\varphi(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \tag{6.9}$$

となって，KL ダイバージェンス $KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ に他ならない．つまり，これは不変でかつ平坦である．

これ以外にも不変で平坦なダイバージェンスを定義する f と φ があるかもしれない．次の定理はこの希望を砕き，逆に KL ダイバージェンスを特徴づける[1,2]．

定理 6.1　双対平坦性を導く不変で分解可能なダイバージェンスは KL ダイバージェンス（またはその向きを変えたもの）であり，それ以外にはない．

この証明は，後の正測度空間の α ダイバージェンスのところで述べる．なお，分解可能という条件を省けば，他にもある．すなわち，$k(u)$ を $k(0) = 0$ で単調増加関数とすれば，$k\{KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]\}$ は分解可能でなくなるが，もちろん不変である．

---

*1)　あとの回でアファイン接続を定義するが，f ダイバージェンスから出てくるのはいつも Fisher 情報行列による計量と α 接続であり，これだけが不変である．

6.2 KL ダイバージェンスの性質[*2)]

統計学や情報理論では KL ダイバージェンスはきわめて有用である．それには大偏差理論が絡んでいる．いま，真の確率分布 $\boldsymbol{p}$ から，N 個の独立なデータ $x_1, \cdots, x_N$ が測定されたとしよう．N は大きいとして，$x = i$ となる回数が N_i であったとする．このときの $\boldsymbol{p}$ の自然な推定量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ は

$$\hat{p}_i = \frac{1}{N} \sum \delta_i(x_k) = \frac{N_i}{N} \tag{6.10}$$

である．$\hat{\boldsymbol{p}}$ は中心極限定理によって，平均が $\boldsymbol{p}$ 共分散行列が $N^{-1}\left(g^{-1}\right)_{ij}$ の正規分布に近づく．$\boldsymbol{p}$ からのずれの期待値は，

$$E\left(\hat{p}_i - p_i\right)\left(\hat{p}_j - p_j\right) = \frac{1}{N}\left(g^{-1}\right)_{ij} \tag{6.11}$$

となる．つまり，$\hat{\boldsymbol{p}}$ は真の $\boldsymbol{p}$ から通常は $1/\sqrt{N}$ 程度ずれている．しかし，$\hat{\boldsymbol{p}}$ が $\boldsymbol{p}$ から大きくずれる可能性は，小さいとは言えないわけではない．大きくずれる確率を評価するのが大偏差理論である．

補題 真の確率分布 $\boldsymbol{p}$ から発生した N 個のデータによる推定量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ が $\boldsymbol{q}$ に等しい確率（図 6.1）は

$$P = \mathrm{Prob}\left\{\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{q}\right\} = \exp\left\{-NKL[\boldsymbol{q} : \boldsymbol{p}]\right\} \tag{6.12}$$

に近づく．

証明は，

$$q_i = \frac{N_i}{N} \tag{6.13}$$

とおいて，このようなデータ $(N_0, \cdots, N_n)$ が出る確率

$$P = \frac{N!}{N_0! \cdots N_n!} p_0^{N_0} \cdots p_n^{N_n} \tag{6.14}$$

を計算すればよい．P の対数を取り，階乗の計算に Sterling の補題

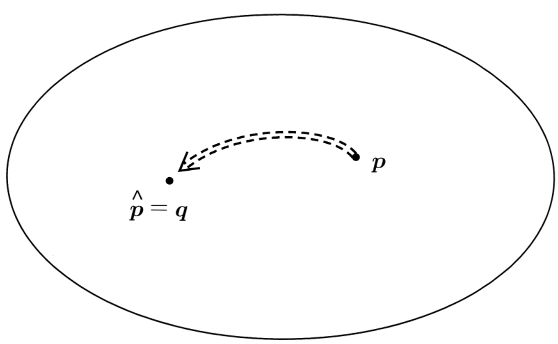


図 6.1 真の分布 $\boldsymbol{p}$ から出た $\boldsymbol{N}$ 個のデータが $\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{q}$ となる確率．

*2) KL ダイバージェンスは，Kullback と Leibler が提唱したとしてその名が付いたが，これはそれ以前にも知られていた．Boltzmann はクロスエントロピーを論じているし，KL ダイバージェンスはエントロピーとクロスエントロピーの差である．A. Turing は計算機，人工知能，パターン形成などいろいろな分野活躍した天才であるが，戦時中，暗号解読に携わっていたときに，このダイバージェンスを知っており，そこへ訪れた Kullback に話したという伝えがある．

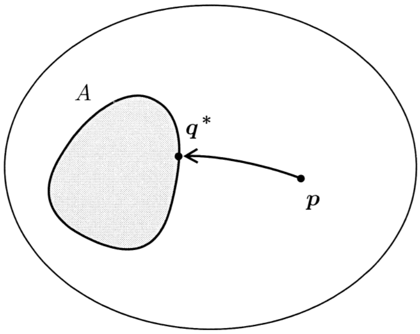


図 6.2　真の分布 $\boldsymbol{p}$ から出たデータ $\hat{\boldsymbol{p}}$ が領域 A に入る確率.

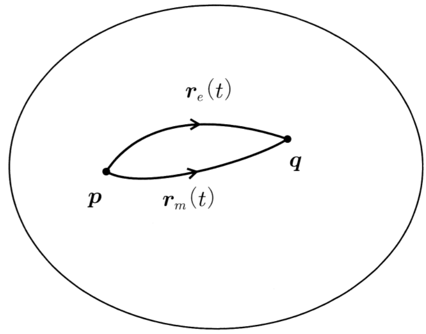


図 6.3　$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とを結ぶ e 測地線 $\boldsymbol{r}_e(t)$ と m 測地線 $\boldsymbol{r}_m(t)$.

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N \tag{6.15}$$

を用いればよい.

これを拡張して，A を S の閉領域とする（図 6.2）．真の分布を $\boldsymbol{p}$ とするときに，推定量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ が領域 A 内に入る確率を計算する.

定理 6.2　$\boldsymbol{p}$ から発生したデータによる推定量が A に入る確率は,

$$\boldsymbol{q}^* = \underset{q \in A}{\arg\min} KL[\boldsymbol{q} : \boldsymbol{p}] \tag{6.16}$$

として，漸近的に

$$\mathrm{Prob}\left\{\hat{\boldsymbol{p}} \in A\right\} = \exp\left\{-NKL\left[\boldsymbol{q}^* : \boldsymbol{p}\right]\right\} \tag{6.17}$$

である.

証明は，$\hat{\boldsymbol{p}}$ が A に入る確率 $\sum_{q \in A} \mathrm{Prob}\left\{\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{q}\right\}$ の計算では，和分の中身が $\boldsymbol{q}^*$ 点で最大で，N が大きいときは他の点の寄与は無視できること（Laplace の原理）を使えばよい.

この定理は，統計学の検定や情報理論など，多くの分野で多用されている.

KL ダイバージェンスは非対称であり，距離の二乗とは違う．しかし，微小な 2 点間のダイバージェンスはリーマン距離の二乗であるから，リーマン距離と何らかの関係があるのではないかとの議論がある．以下に一例を示す．いま，2 点 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を与えて，これを e 測地線つまり指数分布族でつなぐ曲線 $\boldsymbol{r}_e(t)$

$$\gamma_e : \log \boldsymbol{r}_e(t) = (1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} - \psi(t) \tag{6.18}$$

を考えよう（図 6.3；等式は成分毎に成立）．このとき，e 測地線に沿った Fisher 情報量は

$$g_e(t) = \psi''(t) \tag{6.19}$$

である．ここで，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の KL ダイバージェンスを対称化したものを考えると,

$$KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] + KL[\boldsymbol{q} : \boldsymbol{p}] = 2\int_0^1 g_e(t)dt \tag{6.20}$$

となって，リーマン計量の e 測地線に沿った和になる．証明には

$$\int_0^1 g_e(t)dt = \int_0^1 \psi''(t)dt = \psi'(1) - \psi'(0) \tag{6.21}$$

を使えば良い．

2 点を m 測地線で結んだ

$$\gamma_m : \boldsymbol{r}_m(t) = (1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \tag{6.22}$$

についても，この測地線に沿った Fisher 情報量 $g_m(t)$ を積分すると

$$KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] + KL[\boldsymbol{q} : \boldsymbol{p}] = 2\int_0^1 g_m(t)dt \tag{6.23}$$

が言える*3)．

KL ダイバージェンスは情報理論では基本的な役割を果たしている．2 つの事象 X と Y とがあり，X の要素と Y の要素の同時確率分布を $p_{XY}(x,y)$ としよう．また，それぞれの周辺分布を $p_X(x), p_Y(y)$ とする．ここで，新しい確率分布

$$p_{XY}^I(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \tag{6.25}$$

を作れば，この確率分布では X と Y は独立であるが，X の周辺分布と Y の周辺分布を見ればそれは前のものと一致する．すなわち，これは $p_{XY}(x,y)$ を無理やりに独立にしたものである．

情報理論では，X と Y との確率的なからみによって生ずる相互情報量を，エントロピーを使って

$$I[X:Y] = H[X] - H[X|Y] \tag{6.26}$$

と定義する．これは，Y を知ったときに X のエントロピーがどれだけ減るかである．これは X と Y について対称で

$$I[X:Y] = H[X] + H[Y] - H[X,Y] \tag{6.27}$$

のように書ける．ところがこれは

$$I[X:Y] = KL\left[p_{XY} : p_{XY}^I\right], \tag{6.28}$$

つまりもとの確率分布 $p_{XY}(x,y)$ から無理やりに独立にした $p_{XY}^I(x,y)$ へのダイバージェンスに他ならない．当然これは $p_{XY}(x,y)$ が独立とはどのくらい遠いかの測度である．なお，確率分布 $p(x,y)$ の空間 S と，そのうちに含まれる独立な分布の空間

---

*3) リーマン距離は

$$s = \int \sqrt{g(t)}dt \tag{6.24}$$

であるから，これらの積分はリーマン距離とは異なる．

$$I = \{q(x, y) = q_X(x) q_Y(y)\} \tag{6.29}$$

を考えれば，$p_{XY}^I(x, y)$ は $p_{XY}(x, y)$ の I への m 射影になっている．

また，雑音のある通話路の容量も，KL ダイバージェンスで表すときれいな表現が得られることが知られている．

6.3 正測度空間で双対平坦性を与える f ダイバージェンス

話を正測度空間 M_n に拡げよう．すると，KL ダイバージェンス以外にも不変で平坦性を導くダイバージェンスが現れる．これが α ダイバージェンスである．もちろん $\alpha = -1$ のときにはこれは KL ダイバージェンスであり，$\alpha = 1$ のときはその逆向きのものになる．

定理 6.3　正測度空間 M_n で双対平坦性を導く f ダイバージェンスは，次の α ダイバージェンスであり，これに限る．

$$D_\alpha[\boldsymbol{m} : \boldsymbol{n}] = \begin{cases} \dfrac{4}{1-\alpha^2} \sum \left\{ \dfrac{1-\alpha}{2} m_i + \dfrac{1+\alpha}{2} n_i - m_i^{\frac{1-\alpha}{2}} n_i^{\frac{1+\alpha}{2}} \right\}, & \alpha \neq \pm 1, \\ \sum \left(m_i - n_i + n_i \log \dfrac{n_i}{m_i} \right), & \alpha = 1, \\ \sum \left(n_i - m_i + m_i \log \dfrac{m_i}{n_i} \right), & \alpha = -1. \end{cases} \tag{6.30}$$

この定理を証明するために，α ダイバージェンスが Bregman ダイバージェンスの形に書けることを見る．これには $\boldsymbol{m}$ の凸関数を探してもだめで，多少のトリックが必要である．そのために，M_n に新しい座標を導入しよう．いま，$k(u)$ を単調増大関数として，$\boldsymbol{m}$ の各座標軸のスケールを非線形に変え，

$$r_i = k(m_i) \tag{6.31}$$

を座標として使う．これを正測度 m_i の k 表現と言う．とくに，α 表現は重要で，

$$k_\alpha(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-\alpha} \left(u^{\frac{1-\alpha}{2}} - 1 \right), & \alpha \neq 1, \\ \log u, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{6.32}$$

を用いて (6.31) で定義される．いま，M_n に $\boldsymbol{m}$ ではなくて，新しい座標 $\boldsymbol{r} = (r_i)$ の凸関数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ が与えられたとしよう．このとき，M_n の 2 点間に Bregman ダイバージェンスが定義できる．これは M_n に $\boldsymbol{r}$ をアファイン座標，$\boldsymbol{r}^* = \nabla \Psi(\boldsymbol{r})$ を双対アファイン座標とする双対平坦な幾何学を与える．リーマン計量は $\Psi(\boldsymbol{r})$ の 2 階微分（ヘッシアン）である．

ここでは，1 変数の凸関数 $U(r)$ を考え，次の分解可能なダイバージェンス

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sum U(r_i) \tag{6.33}$$

を考える*4)．このとき，$U(r)$ の微分を $U'(r)$ として，双対アファイン座標は

$$r_i^* = U'(r_i) \tag{6.34}$$

である．リーマン計量は (6.33) の $\Psi(\boldsymbol{r})$ の 2 階微分より

$$g_{ij} = U''(r_i)\,\delta_{ij}. \tag{6.35}$$

また，双対凸関数は

$$\Psi^*(\boldsymbol{r}^*) = \sum U^*(r_i^*) \tag{6.36}$$

であり，U の双対関数 U^* は (6.34) の逆変換を $r = U'^{-1}(r^*)$ として，

$$U^*(r^*) = r^* U'^{-1}(r^*) - U\left\{U'^{-1}(r^*)\right\} \tag{6.37}$$

である．

さて，α 表現を用いたときに，凸関数として

$$U_\alpha(r) = \frac{2}{1+\alpha} k_\alpha^{-1}(r) \tag{6.38}$$

を用いる．$\alpha = \pm 1$ のときは上式の極限で定義するが，ここでは $\alpha \neq \pm 1$ としよう．何のことはない，m_i の関数と見れば

$$U_\alpha(r_i) = \frac{2}{1+\alpha} m_i \tag{6.39}$$

であり，U は m_i の線形関数である．しかし，$\boldsymbol{r}$ の関数としては凸で，

$$\Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) = \frac{2}{1+\alpha} \sum \left(1 + \frac{1-\alpha}{2} r_i\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}, \tag{6.40}$$

$$\Psi_\alpha^*(\boldsymbol{r}^*) = \Psi_{-\alpha}(\boldsymbol{r}^*) \tag{6.41}$$

である．ここから，M_n の 2 点 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m})$ と $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{n})$（点 $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を α 表現したもの）のダイバージェンス

$$D_\alpha[\boldsymbol{r} : \boldsymbol{s}] = \Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) + \Psi_{-\alpha}(\boldsymbol{s}^*) - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}^* \tag{6.42}$$

を計算する．これより直ちに次の定理を得る[2)]．

定理 6.4 M_n において，α ダイバージェンスは α 表現をアファイン座標とする Bregman ダイバージェンスであり，これ以外に不変なものはない．

α ダイバージェンス以外にこのようなものがないことを証明する[2)]．

証明 分解可能な f ダイバージェンス $D_f[\boldsymbol{m} : \boldsymbol{n}]$ は，

$$D_f[\boldsymbol{m} : \boldsymbol{n}] = \sum m_i f\left(\frac{n_i}{m_i}\right) \tag{6.43}$$

であるが，これがある表現 $r(m)$ を用いて Bregman ダイバージェンスとなっているとする．このとき，m_i および n_i だけの項を除けば，各成分 i について

$$mf\left(\frac{n}{m}\right) = r(m) r^*(n) \tag{6.44}$$

が成立していなければならない．上式を n で微分すると

*4) 空間 V が与えられたときに，一般に，成分毎のスケール変換でなく，全体としての座標変換 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{m})$ と，$\boldsymbol{r}$ 上の分解可能ではない凸関数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ を考えても，ここから双対平坦なリーマン空間が導ける．

$$f'\left(\frac{n}{m}\right) = r(m)r^{*\prime}(n), \tag{6.45}$$

ここで $x = n$, $y = 1/m$ とおいて

$$f'(xy) = r\left(\frac{1}{y}\right)r^*(x) \tag{6.46}$$

が得られる．いま $h(u) = \log f'(u)$ とおいて上式の対数を取れば，

$$h(xy) = s(x) + t(y) \tag{6.47}$$

のように適当な関数 s, t を用いて上式が分解される．x で微分して $x = 1$ とおけば

$$h'(y) = \frac{c}{y}, \tag{6.48}$$

c は定数．これより，定数を除いて

$$f_\alpha(u) = \begin{cases} u^{\frac{1+\alpha}{2}}, & \alpha \neq \pm 1, \\ u \log u, & \alpha = 1, \\ -\log u, & \alpha = -1 \end{cases} \tag{6.49}$$

になっていることがわかる．上式を標準 f 関数に直すことで，定理が証明される．

確率分布空間では，α ダイバージェンスはなぜ双対平坦でなくて，双対平坦なものは KL ダイバージェンスに限られたのであろうか．確率分布空間 S_n は正測度空間 M_{n+1} の部分空間であり，線形の束縛条件

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1 \tag{6.50}$$

を満たすものである．ところが，α 表現を用いたアファイン座標は $r_i = k_\alpha(m_i)$ であったから，これを使って束縛条件を書けば

$$\sum_{i=0}^{m} k_\alpha^{-1}(r_i) = 1 \tag{6.51}$$

となる．つまり，$\alpha = -1$ の場合を除けば，これは線形の束縛ではない．だから，S_n は M_{n+1} の中の曲面になっていて，平坦性を失う．ただ，$\alpha = -1$ の場合は，平坦な部分空間である．だから，KL ダイバージェンスは S_n でも平坦な構造を導く．$\alpha = 1$ の場合は，その双対として双対座標での線形束縛になり，平坦性が保たれる．ここから，S_n においては，KL ダイバージェンスが唯一の不変で平坦なダイバージェンスであること（定理 6.1）が導ける．

終わりの一言

空間にダイバージェンス関数を導入すると，幾何学が出ることを見た．でも，どんなダイバージェンスを選ぶのがよいのか，そんな疑問に答えて，不変なダイバージェンスと平坦性を生み出すダイバージェンスを調べた．不変なものは f ダイバージェンスであり，平坦なものは凸関数から導ける Bregman ダイバー

ジェンスである．この2つが一緒になることはあるのか．ある．確率分布の空間ではこれはKLダイバージェンスであり，正測度空間ではこれを一般化したαダイバージェンスである．αダイバージェンスから導かれる幾何学構造は不変である．これは今後にいろいろと現れてくる．すなわち，不変な構造として$\pm\alpha$双対なアファイン接続が導入されて，本格的なα情報幾何につながっていく．

参考文献

1) I. Csiszár, Why least squares and maximum entropy? An axiomatic approach to inference for linear inverse problems, *Ann. Statist.*, **19**, 2032–2066, 1991.
2) S. Amari, α-divergence is unique, belonging to both f-divergence and Bregman divergence classes, *IEEE Transactions on Information Theory*, **55**, 11, 4925–4931, 2009.
3) C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*, Berlin/Heidelberg: Springer, 2009.
4) S. Amari, Integration of stochastic models by minimizing α-divergence, *Neural Computation*, **19**, 2780–2796, 2007.
5) G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities* (2nd ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
6) D. Petz, Monotone metrics on matrix spaces, *Linear Algebra Appl.*, **244**, 235–249, 1996.
7) T. Morimoto, Markov processes and the H-theorem, *J. Phys. Soc. Jap.*, **12**, 328–331, 1963.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第16回 —立式で鍛える論理的思考法—

ブラック・ショールズ方程式

石村 直之

1. はじめに

社会科学における数理モデルは，自然科学における数理モデルほど，はたして有効なのだろうか．筆者のような，自然科学系数理から社会科学系数理へと重心が移動してきた者にとって，当初の疑問はまさにこの点にあった．何といっても対象は，各人が独立に意思を持つ人間が形成する社会現象である．いくら統計処理という武器があるにせよ，自然科学の手法をそのまま適用することに，違和感を抱いたとしても不思議はないだろう．

一方，自然科学の数理モデルも，実はそれほど完璧とは言えないのではないだろうか．もちろん，質点の力学のような理想的な対象を意味しての疑問ではなく，結晶成長や凝固現象のモデル化，あるいは地震発生のモデル化や台風の進行予測，というような複雑な対象を念頭にしての疑問である．これらの現象は，明らかに微視的な基本運動の理論とは大きな隔たりがある．そして社会科学の数理が問題とするのは，その最初からしてこのような複雑な現象である．完全な正確さは，もとより望むべくもないだろう．

論文出版が 1973 年である**ブラック・ショールズ（Black–Scholes）偏微分方程式**[4]は，現時点では社会科学系数理におけるおそらく最も著名な方程式の一つだろう．それと同時に，金融工学の基礎を築いたという意味で，悪名ないしは汚名高いとも述べることができようか．しかも方程式が前提とする仮定やモデルは，現実とは合致しないこともほぼ確認されている．それにも関わらず現在も金字塔として残っているのは，おそらくは扱いやすい厳密解が存在することと，またその導出に用いられた様々の概念が本質的にも重要だったからである．

ここでは，そのような重要概念についていく分強調しつつ，ブラック・ショールズ方程式の導出に関しての解説を試みたい．その重要概念をここで最初に挙げておくと，解説順に，1) **無裁定の原理**，2) **対数正規過程**を用いた**株価変動モデル**，3) **動的ヘッジ**である．

2. 商品の価格

2.1 無裁定の原理

多くの人は，日々の生活において，大小様々な必要とする商品を購入して生活を送る．例えば，夏の暑い日中に外出したとき，喉が渇いたので清涼飲料水が欲しくなったとする．10 m 先のコンビニより，200 m 先の大型量販店に行ったほうが，同じ商品を安く購入できることは分かっているのだ

が，あまりに暑いし喉の渇きは耐え難いので，少し高くても近くのコンビニで結局購入してしまう．この金銭的な損失は，またいつかに，大型量販店で仕入れた品物をコンビニに転売し，その価格差分の利益を得て埋め合わせてやろうかとも思うが，もちろんそのような販路は存在しない．

以上の例は他愛もない作り話である．とはいえ，一つの商品の価格は，もしその商品が自由に取引されるならば，ただ一つに決定されても不思議ではない．そのことを示唆していると読み取っていただけないだろうか，実際，金融の数理では，対象とする金融商品が費用なしに自由に取引されるとすれば，もし価格に差があればたちどころに解消されることを仮定する．その結果として，一つの商品にはただ一つの価格が定まるとする．これを無裁定の原理（no arbitrage principle），あるいはさや取り機会の非存在，あるいはタダ飯は存在しない，という．伝統的な経済理論では，需要と供給の均衡する点として価格が決定されると考えるが，金融の数理ではこの無裁定の原理を基礎として，市場取引の結果として価格が定まると考える．門外漢の気楽な発言を許していただくならば，2008 年秋以降の金融危機の遠因には，この思想からの一つの悪しき帰結があるとみなすことができよう．すなわち，現物を調べれば取引を敬遠するような対象でも（所詮サブプライムはサブである），市場取引で価格が決まっている以上は取引するのである．それはとも角として，多くの参加者が集う市場取引によって価格が定まるとみなすならば，その価格変動の数理モデルを設定することは可能だろう．これはモデル化の立場からの自然な発想である．この価格変動の数理モデルについては次節で述べたい．その前に，ブラック・ショールズ方程式が対象とする**オプション**について復習しておこう．

2.2 オプション

ブラック・ショールズ方程式は金融オプションの価格評価に関する方程式である．オプション（option）と言われると，何か金融市場に特有の幾分いかがわしい商品の類かと感じる向きもあるかも知れない．しかし，オプションと類似の考え方そのものは日常生活で普通に用いられている．例えば 2 カ月先に家族旅行を計画し，旅行会社の案内で適当なツアーを見つけたので申し込もうとする．このとき一般にはいくらか申込金を支払う必要がある．それは，旅行代金が 6 万円以上 10 万円未満のときは申込金として 2 万円が入用，などである．その後に，旅行開始 2 週間前までに残額を支払いツアー参加が確定する．この申込金は，まさにオプションの契約料に対応している．申込金を支払うことで，旅行開始 2 週間前まではツアーに参加する権利を購入しているとみなすことができるからである．さらに，もし何か事態が変化し旅行を中止しなければならなかったときには，申込金は戻ってこないが残額は支払わなくて良い．これはまさしく未来の時点でツアーに参加するというリスクをヘッジ（hedge）しているのである．この他にも，基本的に手付金を伴うものはオプションの考え方が内包されていると考えることができるだろう．

金融オプションは，上のような何気なく用いられている生活の知恵を，金融取引の世界で制度化したものとみなすことができる．例えば，これは商品相場に関する例であるが，運送会社が保有する車のためのガソリンを購入する状況を考えよう．ガソリンの価格変動は激しいので，現時点で半年後必要となる量の何割かの購入価格を決めておきたいとする．今後半年でガソリンは値上がりすると予想し，半年後に価格 E で G 単位購入する契約を結ぶ．もちろんこの契約が成立するためには，半年後にはガソリンの価格が下がることを予想する供給者が必要である．半年後にガソリンの価格が S となっていれば，運送会社は $S > E$ あるいは $S < E$ に従って，市場価格での調達と比較して，利益 $G(S-E)$ あるいは損失 $G(E-S)$ を被ることになる．これを**先渡し契約**（forward contract）という．

ここで，この売買取引を実行するかどうかの権利（オプション）が付与された契約を考えよう．このとき運送会社は，半年後にガソリンの市場価格 S

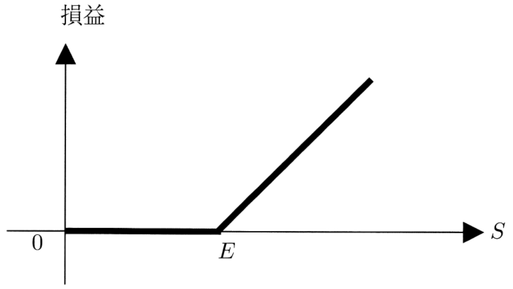


図 1　コール・オプションのペイオフ関数.

が契約価格 E よりもしも下回っている $(S < E)$ ならば，この契約を実行せず市場で調達すれば良い．逆に上回っている $(S > E)$ ならば，そのまま契約を実行する．すなわち，このオプション契約の半年後の価値は $\max\{S - E, 0\}$ である．この関数を**ペイオフ**（payoff）**関数**という．

このままでは運送会社の利益となるばかりなので，現時点では何らかの契約料，すなわち申込金を支払ってこの契約に参加することとなる．よって特に価格変動のリスクは，オプションの売り手（writer）が負うことになる．

以上がオプション契約の基本的な考え方である．運送会社は，ガソリンという変動する**原資産**（underlying asset）の上に書かれた，購入する権利すなわち**コール・オプション**（call option）を購入している．あらかじめ定められた価格 E のことを**行使価格**（exercise price），また契約期限である半年後のことを**満期日**（maturity）という．満期日のみで取引可能なオプションなので**ヨーロッパ型**という．満期日までのいつでも取引可能な場合は**アメリカ型**と呼ばれている．

3. 価格変動の数理モデル

3.1 株価の変動

金融オプションは一般に株価を原資産とする．その価格評価は，当然ながら株価変動の数理モデルに基づいてなされる．ここでは，この株価変動について考えてみよう．

まず，実際の証券市場ではどのように株価が形成されているのか見てみよう．例えば東京証券取引所上場のある銘柄の株価を考える．取引開始時および終了時の板寄せではなく，取引時間中のザラ場とする．投資家の注文方法は大きく 2 つあり，一つは**成行（なりゆき）注文**（market order）もう一つは**指値（さしね）注文**（limit order）である．成行注文は，売買価格を明示せず数量を指定して注文する．指値注文に優先するため売買は成立し易い．しかし，価格変動が大きいときには，高く購入したり安く売却したりしてしまう場合がある．これに対して指値注文は，売買価格と数量を指定して注文する．この 2 種類の注文が，早いほど優先される時間原則の下で，現在値との差が小さい価格から注文数のすり合わせが行われ，売買数量が一致した点として次の株価が決まる．取引量の多い流動性の高い銘柄では，瞬時に株価が変動していく．楽観的悲観的様々な性向の投資家による，様々な注文の結果として，株価がちょこまかと極めて複雑に変動するのである．

この株価変動を，類似とみなし得る自然現象，すなわち**ブラウン**（Brown）**運動**を用いてモデル化した最初の試みは L. Bachelier (1900)[1] による．しかし残念なことに，この重要な研究は忘れ去られたようで，1960 年代以降になって再発見されることとなる．

ブラウン運動 W_t $(t \geq 0)$ とは，現在の確率論の定義では次のようにまとめられる．すなわち，時間一様な加法確率過程であり，確率 1 でその道が連続，さらに $W_t - W_s$ $(t > s)$ は平均 0 分散 $t - s$ の正規分布に従う．また，**Ito（伊藤）積分**の下では Ito の公式 $(dW_t)^2 = dt$ が成立する．この定義の内容については，今はそれほど気にしないでいただきたい．次に簡単なモデルを用いて，もう少し詳しく考えてみたい．

3.2 拡散方程式

株価変動，あるいはより広く商品の価格変動を，簡単なおもちゃのモデルを用いて記述し，拡散方程式を導出してみよう．あとで分かることだが，このモデルは対数ブラウン運動のおもちゃモデルである．時刻 t に価格 x (> 0) である商品は，Δt (> 0) ごとに確率 $1/2$ で価格が $(1 + \Delta x)$ 倍とな

るか，確率 1/2 で価格が $(1+\Delta x)^{-1}$ 倍となるか，どちらかに変動するとしよう．価格が何倍かされるというこの設定の下では，価格は決して負の値とならないことに注意しよう．

時刻 t に，商品の価格が x である確率を $p(x,t)$ と表そう．このとき，上の価格変動モデルの意味するところから

$$p(x,t+\Delta t) = \frac{1}{2}p((1+\Delta x)x,t) + \frac{1}{2}p((1+\Delta x)^{-1}x,t) \quad (1)$$

という等式を得る．すなわち，時刻 $t+\Delta t$ に価格が x であることを意味する左辺は，一つ前の時刻 t では価格が $(1+\Delta x)^{-1}x$ であったか $(1+\Delta x)x$ であったか，それぞれ独立に半々の確率だからである．

さて (1) の両辺をテイラー展開しよう．まず左辺は

$$p(x,t+\Delta t) = p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(x,t)\Delta t + (\text{高次項})$$

となる．右辺は，$(1+\Delta x)^{-1} = 1-\Delta x+(\Delta x)^2-$ (高次項) を用いれば

$$p((1+\Delta x)x,t) = p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial x}(x,t)x\Delta x + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)x^2(\Delta x)^2 + (\text{高次項})$$

$$p((1+\Delta x)^{-1}x,t) = p(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x}(x,t)(x\Delta x - x(\Delta x)^2) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)x^2(\Delta x)^2 + (\text{高次項})$$

となるので，足し合わせて

$$\frac{1}{2}p((1+\Delta x)x,t) + \frac{1}{2}p((1+\Delta x)^{-1}x,t) = p(x,t) + \frac{x}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)(\Delta x)^2 + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)(\Delta x)^2 + (\text{高次項})$$

を得る．よって等式 (1) は

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,t)\Delta t = \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)(\Delta x)^2 + \frac{x}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)(\Delta x)^2 + (\text{高次項})$$

となった．ここで高次項を無視し，$(\Delta x)^2/\Delta t \sim \nu$ $(\nu > 0)$ を保ちながら $\Delta t \to 0$ とすると，すなわち $\Delta x \to 0$ とすると

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,t) = \frac{\nu}{2}\left(x^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t) + x\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)\right) \quad (2)$$

を得る．これは p に対する拡散方程式である．つまりこのおもちゃモデルは，自然に拡散方程式 (2) を導くのである．

ここで $(\Delta x)^2/\Delta t \sim \nu$ の意味を考えよう．もちろんこれは，標準ブラウン運動 W_t に対する Ito の公式 $(dW_t)^2 = dt$ と対応している．標準というのは $\nu = 1$ ということである．さて，ここでの考察は，対数をとって考えると容易になる．つまり

$$(1+\Delta x)x \to \log(1+\Delta x) + \log x,$$

$$(1+\Delta x)^{-1}x \to -\log(1+\Delta x) + \log x$$

のように，何倍かされることが和と差の変動となる．このとき，考えてきた価格変動の単位時間当たりの移動平均は

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}\log(1+\Delta x) - \frac{1}{2}\log(1+\Delta x)\right) = 0$$

となる．さらに単位時間当たりの分散は

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}\log^2(1+\Delta x) + \frac{1}{2}(-\log(1+\Delta x))^2\right) = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + (\text{高次項})$$

である．すなわち，$(\Delta x)^2/\Delta t \sim \nu$ の意味は，拡散方程式の拡散係数が価格変動の分散と対応していると解釈できる．

以上の考察により，株価 S_t の価格変動モデルの骨格を

$$dS_t = \sigma S_t dW_t$$

と設定すれば好都合であることが予想される．ここで，W_t は標準ブラウン運動，また σ (>0) はボラティリティー（volatility）と呼ばれる定数で，σ^2 が拡散係数に対応する．

いわゆる **Black–Scholes–Merton の株価変動モデル**[4, 10]は

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3)$$

と与えられる．ここで $\mu S_t dt$ の項は**ドリフト（drift）項**と呼ばれ，株価変動の短期での上昇ないし下降の傾向を表す．式 (3) は

$$d(\log S_t) = \Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)dt + \sigma dW_t$$

と書き直すことができるので，株価の対数 $\log S_t$ が，ドリフトを伴うブラウン運動に従うことが理解できる．この意味で (3) は対数正規過程と呼ばれている．

4. ブラック・ショールズ方程式

4.1 導出

ブラック・ショールズ方程式は，株価変動モデル (3) と同時に債券 B_t の変動モデル

$$dB_t = rB_t dt \qquad (4)$$

を必要とする．ここで $r\ (>0)$ は利子率であり，考えている期間では定数と仮定する．(4) は単なる通常の微分方程式なので，簡単に $B_t = B_0 e^{rt}$ と解くことができる．まとめると，ブラック・ショールズ方程式の基礎となるモデルは

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dB_t = rB_t dt$$

という2つの変動過程である．

目標は，満期日 T におけるペイオフ関数が $C(T, S_T) = \max\{S_T - E, 0\}$（$E$ は行使価格）となるヨーロピアン・コール・オプション C 現時点 $t\ (<T)$ における価値 $C = C(t, S_t)$ がみたすべき偏微分方程式を求めることである．

このオプションは，株価 S_t と債券 B_t により

$$C(t, S_t) = \varDelta S_t + B_t \qquad (5)$$

と表されたとしよう．ここで $\varDelta$ は t において定数と考える．この意味は，t において変分を取る際に定数とみなすということである．B の係数が 1 であることは，債券 B_t を**基準財**（numéraire）として考えていることを反映する．

今，(5) の変分を考えよう．(3) に Ito の公式を適用して

$$(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$$

であることに注意する．左辺は

$$dC(t, S_t) = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(dS_t)^2$$

$$= \Big(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu C\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\Big)dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S_t}dW_t$$

となる．右辺は

$$\varDelta dS_t + dB_t = (\varDelta\mu S_t + rB_t)dt + \varDelta\sigma S_t dW_t$$

なので，$\varDelta = \partial C/\partial S_t$ とすれば，dW_t の係数は消える．よって dt の係数より

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = rB_t$$

を得る．$B_t = C - \varDelta S_t = C - S_t\partial C/\partial S_t$ なので，結局

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + rS_t\frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0 \qquad (6)$$

を得る．これがヨーロピアン・コール・オプションに対するブラック・ショールズ方程式である．方程式は，満期条件

$$C(T, S_T) = \max\{S_T - E, 0\} \qquad (7)$$

の下で過去の時間 $t < T$ 方向に解く．

この導出において重要な概念は (5) に潜んでいる．まず (5) のように C を S_t と B_t によって表すことを，C は S_t と B_t により**複製される**（replicate）という．$\varDelta$ は t に依存するので，S_t と B_t の割合は刻一刻と変化する．つまり複製の比率は，連続的に組み換えられていることになる．しかも外部との資金流入や流出はないので，**自己充足的**（self financing）に行われている．さらにこの組み換えは，変分を取った際に不確実性を導く dW_t を含む項が消えるようになされる．この意味でこの組み換え操作を動的ヘッジ（dyanmic hedge）という．

ところで変分を取る際に，$\varDelta$ は t において定数と考えると述べた．これは $dC_t = C_{t+\varDelta t} - C_t$ という近似を考えれば，(5) の変分を

$$C_{t+\varDelta t} - C_t = \varDelta(S_{t+\varDelta t} - S_t) + (B_{t+\varDelta t} - B_t)$$

のように解釈することである．$\varDelta$ に関しては区間 $[t, t+\varDelta t]$ の左端における値とするのである．これからも分かるように，数学としてより正確な理解のためには確率過程の概念が必要かつ好都合と

なる.

4.2 評価公式

ブラック・ショールズ方程式 (6) を，満期条件 (7) の下で解こう．変数変換

$$C(S_t, t) = Ee^{\alpha x + \beta\tau}u(x, \tau)$$

を行う．ただし，$k = 2r/\sigma^2$ とし

$$x = \log(S_t/E), \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t),$$
$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

とする．このとき，満期条件は初期条件となり

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty),$$
$$u(x, 0) = \max\{e^{(k+1)x/2} - e^{(k-1)x/2}, 0\}$$

のように熱方程式の初期値問題となる．これは基本解を用いて解くことができる．

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-(x-y)^2/4\tau} u(y, 0)dy.$$

元の変数に戻すと，著名なヨーロピアン・コール・オプションに対するブラック・ショールズ評価公式を得る．

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2).$$

ただし

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy,$$
$$d_1 = \frac{\log(S_t/E) + (r + 2^{-1}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

この評価公式に関しては，結論のみが述べられている書物も多い．ここでの導出からも分かるように，ブラック・ショールズ方程式を認めれば，それを解いて導くことは，むしろ標準の難易度に属するだろう．

5. おしまいに

ブラック・ショールズ方程式の導出を，その考え方を中心に述べた．現在の数理ファイナンスでは，様々な領域で膨大な研究成果が既に得られている．ブラック・ショールズ方程式の周辺の話題に限っても，多くの論ずべき点がまだ残っている．興味のある方は，参考文献で挙げた著書や論文[2,3,5~9,11,12]を参照していただきたい．日本語で書かれた良書も多い．また，拙論も含めさせていただいた．

ところで本稿では，確率過程の立場より偏微分方程式論としての立場を取った．とはいえ本文中でも述べたように，数理ファイナンスでは確率過程の言葉は必須であり，実際にも相性が良い．もちろん数理ファイナンスには，偏微分方程式論から見ても面白い方程式が存在する．その場合でも多くは，その基礎が確率過程や確率制御にある．もしこの論説で数理ファイナンスに興味をもち，さらに勉強しようと考えている方が現れるならば，その場合，少なくともどこかで確率過程に慣れ親しんでおく必要があろう．

参考文献

1) L. Bachelier: Théorie de la spéculation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **17** (1900), 21–86.
2) M. Baxter and A. Rennie: *Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
3) T. Björk: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, 2004.
4) F. Black and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities, *J. Political Economy*, **81** (1973), 637–659.
5) 藤田岳彦：『ファイナンスの確率解析入門』，講談社，2002.
6) J. Hull: *Options, Futures, and Other Derivatives*, 4th edition, Prentice-Hall, New Jersey, 2000.
7) 石村直之：「金融工学の数理」，第 1 回–第 4 回，日本応用数理学会誌，**17** (2007), pp.14–19, pp.165–170, pp.240–245, pp.336–341.
8) 石村直之：「デリバティブ再入門」，第 1 回–第 5 回，証券アナリストジャーナル，**47** (2009), 6 月号 pp.124–133, 7 月号 pp.93–102, 8 月号 pp.86–95, 9 月号 pp.103–112, 10 月号 pp.92–101.
9) N. Ishimura: Remarks on the Black–Scholes equations with the effect of transaction costs, *Asia-Pacific Financial Markets*, **17** (2010), 241–259.
10) R.C. Merton: Theory of rational option pricing, *Bell J. Econ. Manag. Sci.*, **4** (1973), 141–183.
11) 三浦良造：『デリバティブの数理』，サイエンス社，2000.
12) P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne: *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

（いしむら・なおゆき，一橋大学大学院経済学研究科）

リレー連載

人物で学ぶ物理

創始者の思考で学ぶ

第2回

Lars Onsager

伊豆山 健夫

1. Prologue

1962年5月，米国MITで研究生活を始めたばかりの筆者に，東大の久保亮五教授から「Brown University で近く開催されるOnsager Conferenceで講演するので君もこないか」とお便りがあった．ボスも「ぜひ行ってこい．費用はMITが負担する」．おかげで筆者にとって雲の上の碩学であったOnsager を間近に拝する機会を得た．

会議はIrreversible Thermodynamics and the Statistical Mechanics of Phase Transitions と名付けられ，一連の講演だけから成り，小規模で密度の濃い内容であったが，In honor of Onsager と謳いながら，先生自身の講演はなかった．しかし先生はすべての講演で最前列中央に席をとり，にこにこした表情でゆったり聴き入っておられた．会議の終わりに先生はコメントを求められ，何かお話になったが，筆者は全く聴きとれず，自らの英語力に落胆した．しかしその直後に久保教授から「Onsager の話は全く分からないね」と声をかけて戴きほっとした．

Banquet の冒頭でOnsager 先生の回顧談があったが，これも分からなかった．しかし，にこやかな表情（the famous Onsager smile!）と，大きな体に満ちあふれた鷹揚で暖かい雰囲気が忘れられない．

2. 非凡な研究者の登場

Lars Onsager は 1903 年 11 月，Oslo で産まれ，高校までOsloで教育を受けた．父は上級弁護士で，鋼鉄の大株主．何不自由なく恵まれ，かつ自由な教育環境の下，Lars は少年時代から西洋古典や哲学書を驚くほど読破していた．1920 年，工業化学の技術者を志し，Trondheim にある Norway 工科大学に入学した．

しかし知的で数学好きのLars は高校のときから Whitaker and Watson の『Modern Analysis』を購入し，工科大学在学中に各章末尾に並ぶ問題（Cambridge 大学の数学卒業試験 Tripos で出題された難問などが並ぶ）をほとんど解いた．これは大変な能力と忍耐力を要し，何か才能の浪費のようにも思われるが，後にOnsager の名を不朽にした「2次元Ising Modelの厳密解」はこの努力の賜物だとみる人もいる．確かに忍耐力の養成としてはそうであろう．しかしMath Tripos はいかに難問とはいえ，答えがあるという確信をもって取り組める．これに反し，「2次元Ising Model に厳密解は存在するか？」の問いに，Yesと確信もって答えることは，Lars 以前には，たとえMath Tripos 優勝者でも，できなかったはずだ．



Lars Onsager (1903–1976).

Larsが理論化学者の道を歩み始めたのは，当時の最先端問題「電解質溶液の理論」に腐心してからであった．当時の理論では電解質溶液の物性は，溶液を構成するすべてのイオンについて加法的である，とされていたが，Larsは電荷どうしの相互作用は長距離に及ぶので，加法性を疑っていた．そこに現れたのがDebye–Hückel理論．これは，電解質溶液の熱力学的物性はよく説明できたが，輸送問題では破綻した．Debye–Hückelの高度な理論をLarsはよく理解し，この電気伝導と拡散の理論の誤りに気付き，正しい理論は極めて簡明であることに気付く．20歳になって間もないときのことである．

その考察が後にOnsagerの相反定理として実を結ぶことになる．何種ものイオンそれぞれに濃度勾配があって，この種のイオンの流れはあの種のイオンの流れも誘起する．この一見複雑にみえた問題がLarsによって簡単化されたのである．

Ising Modelにしても電解質溶液の輸送問題にしても，一見複雑そうな難問の中に，簡明かつ美しく普遍性のある解答の存在を嗅ぎ取る天才性をLarsは持っていた．またその後の人生でも，Larsは簡明かつ美しい解答が出せる問題にしか深入りしなかった．従ってまた，Larsは政治や宗教には全く無関心．量子力学の観測問題や統計力学の数学的基礎，などにも無関心であった．

電解質溶液理論のPieter Debyeは当時ヨーロッパの（従って世界の）理論物理の大御所であり，Zürich工科大学教授であった．1925年のある日，その教授室に，Norwayからの訪問者が現れた．金髪碧眼長身の青年で，何も言わずに粛々と教授の机まで歩いてきて，机越しにかがみ込み，教授の顔を見つめながら，おごそかに口を開いた．

「Debye先生！ 先生の電解質溶液理論は正しくありません」
「まあそこの椅子に座りたまえ．君の話を聴かせてくれ」

議論が終わるや否や，教授はこの青年を助手に採用しよう，と決めた．初対面の無名の青年をたちどころに天才と察知したのはさすがである．Larsは1926年と1927年に1編ずつ*Physikalische Zeitschrift*にこのテーマの論文を発表しているが，明らかに師Debyeの指導を受け，緻密な論文であった．師はLarsを天才と讃え，引き立ててくれた．師のもとを離れてからもLarsは電解質溶液のみならず極性分子（水分子のように電気二重極をもった分子）の液体や溶液の理論を構築するのだが，これらは師の恩恵によるところが大きい．

3. 講義下手の落第先生

1928年にLarsは米国に移住し，Johns Hopkins大学の講師として化学の入門コースを担当したが，ほどなく首になる．入学早々の学生の学力を全く思いやることができなかったためである．不十分な知性とのコミュニケーションの不具合は極めて深刻で，それは生涯続く問題だった．物理の現実を奥深く見通す類まれなLarsの知性が，他人の理解度を読みとる力では常人よりはるかに劣っていた．従って大学の講義はその後もずっと不人気であった．それは後になってからも常に問題にされたが，Larsには理解できなかった．そもそも彼は学生たちの顔を見て講義する習慣がなく，学生たちに背を向け，黒板を向いて書きながら授業

していた．悪いことに先生は大柄で，黒板に書いても学生には見えない．席を離れ，先生を回り込んで黒板を覗かなければならなかった．

こうしたコミュニケーションの不具合は傲慢とか，頭の悪い人を我慢できない狭量性とかのためではなかった．先生は極めて親しみやすい人だった．不具合の理由は「自分が思考したことは相手もまた同じくらい思考したに違いない，とする楽天性」による．学生だからといって軽視したわけではない．不具合は上質の研究者相手でも同じだった．その典型的な例として，年代的には20年も後の話で，先生がYale大学の教授になってからの逸話を述べる．

第二次世界大戦末期，Larsは2次元Ising modelの厳密解に成功し，その後この問題をBruria Kaufmanがspinor algebraで解析し，Larsとの共同研究に発展した．Larsはspinor algebraの数学的美しさに惹かれた時期があった．

戦後間もなくLeiden大学のde Haasの研究室で，de Haas–van Alphen効果の名で知られる見事な発見があった．それは金属電子が強い磁場を受けると，その反磁性が線形応答でなく，磁場の逆数を変数として磁化を観察すると，量子論特有の振動が鮮明に現れることを示した．Larsはこれに惹かれ，素早く理論を発表している．

当時，Cambridge大学Cavendish研究所は（所長は未だBragg卿）Mott, Pippard, Schoenberg等がいて，この問題に注目していた．その縁であろうか，LarsはCavendish研究所に一年間Fulbright Scholarとして滞在した．そこで研究課題が数学的形式の美の追求から彼本来の実証科学に戻った．そしてde Haas–van Alphen効果の公式を導き，論文にした．金属電子のフェルミ面を磁場の方向に垂直な平面で輪切りにし，切り口の面積が極大になったときの面積を S とすると，Onsagerの公式は，磁場の逆数（$1/B$）に現れた磁化の振動の周期が（$1/S$）に比例するというものである（面積極小でもよい）．これによってフェルミ面の知見が得られることになった．

電解質溶液で見せた「簡明な結果を見抜く天才性」をLarsはここでも発揮した．フェルミ縮退した伝導電子は，磁場によるLorentz力を受けると，波数空間で，一点に留まっていられない．磁場は仕事をしないので，フェルミ面上の電子は同じ面上を動いてゆき，一周して元の点に戻る．従って，この運動は量子化され，エネルギーは「とびとび」になるよう，フェルミ面近傍のエネルギー準位が束ねられる．磁場の大きさが変わると束ね方が変わるので磁化の振動が現れる．これはフェルミ面上の何処でも起こる変化だが，S が極大のところだけが見えて，あとは相殺される．

そんな滞在中のあるとき，彼はCambridgeのKapitza Clubでの講演を頼まれた．当時Cavendish研究所の主題が固体電子論，なかんずくde Haas–van Alphen問題であったから，講演を頼んだ側はLarsにその話を期待したであろう．ところが彼はIsing latticeのKaufmanとの共同研究の話をするという．

紳士の国である．講演依頼者はLarsに「聴衆は実験家が多いです．あまり専門的にならないように」と警告しただけで引き下がった．にも関わらず，講演はいきなりspinor algebraの「数学」であった．20分以上聴衆の当惑が続いていたが，実験家の一人が勇気を出して，「What is a spinor？」と質問した．Cambridgeという場である．「お話は全くわかりません」の暗号であろう．しかしLarsは思慮深い言葉と面持ちでこう答えた：

“A spinor—no, a set of spinors—is a set of matrices isomorphic to the orthogonal group.”

先生の顔は “the famous Onsager grin”．きらめくNordic blueの眼が親しげに聴衆の当惑した顔に注がれた．しかし質問の答えはこれだけ．何事もなかったかのように講義は続いた．

4. 美しい花はBrown大学でひそかに開いた

話は1928年に戻る．John Hopkinsを解雇されたLarsに，Brown大学が門を開いた．化学の主任教授が，Larsの研究の才を買って，research instructorの職を与えてくれたのである．しかし

あれだけの業績をあげたLarsは博士号をもっていなかった．5年間のBrown在職中，大学のカタログの中で，彼の名は末尾にMr. Onsagerと記されているだけであった．Nobel賞の受賞理由となる彼の研究のすべてが，Brown在職中，博士の肩書きなしで遂行されたのだ．

実験家のKraus主任教授はLarsに，理論ばかりでなく，実験もやるように勧めていた．あるときLarsは「アイソトープを熱拡散で分離する実験」をKrausに申し出た．彼は喜んで援助を約束した．実験のために購入すべき機材は「長いパイプだけ」と聞いて，彼の喜びは倍増した．ところが援助の約束はすぐに取り消された．「パイプはプラチナ製です．それを地下室から3階まで通してください」と言われたのである．これ以後，実験をやれと言われなくなった．

Brownに来ても教育者としてのLarsの進歩は全くなかった．辟易した学生たちはその講義題目を“Sadistical Mechanics”と呼んだ．悪いことに不況が襲ってきた．Brownに採用された翌年に，New York株式市場が大暴落．そして1932年には恐慌がピークを迎え，全米の銀行が業務停止する騒ぎが起こり，失業率は25%に達した．大学の財政難も深刻で，Larsを雇い続ける余裕がなくなり，1933年にBrownを去る．

さすがに研究業績がものを言って，すぐYale大学に迎えられた．Sterling and Gibbs Fellowの肩書きであった．このBrownとYaleの間の夏休みをヨーロッパで過ごしたLarsはこの間，オーストリアの電気化学者を訪問した．あいにく電気化学者の体調が悪く，妹がLarsをレストランでもてなすことになった．食事の間，Larsはいつものように口数が少なく，食事が終わるとスヤスヤ眠り込んでしまった．大変ハンサムな青年で，兄からは「時代のはるか先を行く天才」と聴いていたのだが，これにはちょっと失望．ところがこの青年，目が覚めるやいきなり「慕わしいと思われますか？」．8日後に29歳の新郎と21歳の新婦が誕生した．

Larsにpostdoctoral fellowshipを与えたYaleの化学科は難題に直面した．驚いたことにPh.D.をまだ持っていなかったのだ．Larsは2年も前に相反定理を発表していたし，彼にしてみればその抜粋をTrontheimの母校に送って博士の申請をしていたのだが．ところが母校は「このままでは博士論文の体をなしていない」と却下．普通ならこんな行き違いは考えられないが，なにしろLarsはメールボックスを開けるや，中の郵便をその場で破いてしまう，と噂された先生である．通信手段は郵便しかなかった時代だ．もっとも狼狽したのはLars自身で，Dr. Onsagerと紹介されるたびに困っていた．見かねた同僚がPh.D.をYaleに申請するように勧めた．必要なコースも取っているし，口述試験もすんでいるではないか．いままで出版した論文のどれか一つをPh.D. thesisとして出せばそれですむことだ，と言う．ところがLarsは全く新しいことを書かなければいけない，と言い張って間もなく「周期4πのMathieu方程式の解と関連する関数」と題する論文を提出した．化学教室では誰もわからない．物理教室でも同じ．そこで論文は数学教室に送られた．有り難いことにWhittaker and Watsonの『Modern Analysis』のエキスパート教授がいて，楽しく読んでくれた．そして化学の主任教授に「化学教室の気が進まないなら，数学科が喜んで博士に推薦します」と言ってくれた．そうなると化学教室も「喜んでこのまま化学博士と認めよう」ということになった．

1934年にはYaleのAssistant professorとなり，翌年に博士号を取得．New Havenに家を購入．子供が4人できた．自然が大好きで，New Hampshireに農場も買って，そこのfarm houseによく行った．歩くのが大好きで，水泳をし，cross-country skiingもした．これらは亡くなるまで続いた．

大学院生を巻き込んで研究するより，一人で研究するのが好きで，グループを作らず，学会の組織に加わらず，Yaleの行政的仕事も好きでなかった．同僚となったKirkwoodとは全く正反対だ．

Brown時代（1928–1933）の最大の研究成果は「線形非可逆課程における輸送係数が満たすべき

Onsager の相反定理」である．論文は 1931 年に *Phys. Rev.* に発表された．そしてそれが Lars に 1968 年度 Nobel 化学賞単独受賞の栄誉をもたらした．Lars がその導出に用いた思想は，その後の統計物理学に大きな流れを作り出した．20 世紀末に発表された Jarzynski の等式も，導出の根底にある思想はこの流れの延長線上にあると言える．

「輸送」とは「マクロな流れ」であり，これを J と書く．それは電流や，密度の勾配による拡散流や，温度勾配による熱流でもよい．物体の両端の電位や化学ポテンシャルや温度の差を一定にしておけば流れ J は一定である．これらは定常過程と言われる．両端のそれぞれで常に熱平衡（熱浴）が保たれ，両端の違いがあまり大きくない限り，非可逆課程は定常過程に落ち着く．それは放置された孤立系が熱平衡状態に落ち着くのと同様だ．ただしここに前提が 2 つある．

1) ［**局所平衡の前提**］ 温度勾配があって熱流が発生するというが，温度は熱平衡状態で定義されたのではないか？ しかり！ 各部分が熱平衡で，温度が定義されているという前提がまず必要．そしてまた物体全体のエントロピー（内部エネルギー）は各部分のエントロピー（内部エネルギー）の総和である，という前提である．各部分が熱平衡であっても，物体全体では（一様にならない限り）熱平衡ではない．

2) ［**線形非可逆課程**］ 両端の違いがあまり大きくない限り，と言ったが，温度や化学ポテンシャルの勾配があまり大きくない，ということである．

流れ J はいろいろあり，J_i と書く $(i = 1, 2, \cdots)$．流れを生み出す力は各種勾配で，X_i と書く．電解質溶液で述べたように，“各種” は相互に絡み合う．また前提 2) により，X の 2 次以上の項は無視する．その結果，一般に $J_i = \Sigma_j L_{ij} X_j$ と書ける．ここで，L_{ij} を輸送係数と言う．相反定理は $L_{ij} = L_{ji}$ と主張する．

Lars はこう考えた．外力 X_i はそれに共役な物理量を平衡値からずらして α_i という値にする．$J_i = \mathrm{d}\alpha_i/\mathrm{d}t$．（熱学的観測はミクロにみれば粗い．瞬間の時刻はありえないから，微分というのは差分のことである．差分における Δt の大きさに関係なく相反定理は証明される．）また $\Sigma_j \alpha_j X_j$ が外力のした仕事であって，エントロピーの変化になるから

$$L_{ij} = k^{-1} \langle J_i(t) \alpha_j(t) \rangle$$

が時刻 t における輸送係数になる．k は Boltzmann 定数である．Lars の場合，後の線形応答理論（久保理論が代表）のように，ミクロな力学法則そのものを線形化する必要がない．非可逆課程のただ中の状態でもよい．この際，平均 $\langle \cdots \rangle$ の意味は多少茫漠とはするが，状態の推移を経路積分で表現し，most probable path 上の 1 点であってもよい．茫漠と言ったのは，久保理論のように系の力学構造から線形応答係数を算出するシナリオはない．しかしながら平均 $\langle \cdots \rangle$ の根底にミクロな力学法則があることを Lars は意識していて，その力学法則が時間反転の対象性をもっているのだから，外部磁場 H を受けた場合，$L_{ij}(H) = L_{ji}(-H)$ となるとも指摘した．物質常数としての応答係数は，外場と応答の間のマクロな線形性を記述しているのだが，線形応答理論の応答係数はミクロな線形関係であり，この両者が一致する根拠はあるのか．この批判は相反定理の基礎付けにまでは及ばない．

［**相反法則の重要性**］ 相反法則によってエントロピー生成が $\Sigma_j L_{ij} X_i X_j$ と書け，定常過程ではエントロピー生成が最小になる，と証明される．これは Newton 力学の最小作用の原理に対応．これによって諸分野で “Energy Principle” とされる原点が提供された．

しかしながらこうした評価は相反定理の発表当時には与えられなかった．美しい New England の南端で，美しい花がひそかに開花していたのである．

5. 第二次大戦と 2 次元イジング格子

1940 年ヨーロッパが戦争になり，翌年日本の真珠湾奇襲により，アメリカも全面的に戦争に踏み込んだ．当然物理や化学の実験もできなくなった．Nazis に追われたわけでもない移民の Onsager．夫人は敵国 Austria 人．おかげで Lars は Manhattan 計画に誘われることもなく，静かな孤独の期間を楽しんだ．得意な数学的問題：2 次元 Ising lattice の厳密解追求に没頭できた．1 次元 Ising lattice の解は簡単であったし，相転移がないことが知られていた．2 次元では相転移が存在することも知られていたが解はわかっていなかった．2 次元の問題を 1 次元の解から構築しようと，Kramers と Wannier が transfer matrix 法を駆使して解析を行っていた．これを解きほぐし，ある工夫をすれば厳密解が得られることに Lars が気付いたのは早くも 1942 年のこと．よく練り直し，1944 年に厳密解が出版された．戦争の最中であった．

これは全く個性的論文である．読者諸氏が現在学ぶ 2 次元 Ising lattice の解法は，我々に馴染みのある数学に基づいているが，1944 年の Lars は全く別世界の人であった．当時でも今でもほとんど物理学者に馴染みのない quaternion algebra が使われた．また 20 歳までに没頭した Whittaker and Watson の自習が底力を発揮し，楕円関数も使われた（楕円関数は Lars に触発されて，後年数理物理の分野に登場する）．このようにして Lars は，2 次元 Ising lattice では，高温側の非磁性相と低温側の強磁性相が二次相転移（entropy gap がない）で仕切られことと，相転移温度において entropy の温度微分である比熱が対数的に発散することを証明した．

それから後，数学者 Kaufman の協力で，Onsager の algebra は整理され，1949 年には，多次元空間における spinor algebra と称するより見通しのよい方法で，低温側で磁化がどのように増えてゆくか，spin-spin の相関はどうなるか，転移点近傍で相関がどのよう伸びてゆくか，を厳密に示すことができた．これらの問題は現在，臨界指数問題と言われている．

物理の世界ではまず，algebra よりも相転移の臨界現象が輝いた．非磁性–強磁性の相転移，一般的に二次相転移は Landau の現象論によって記述できると思はれていたのだが，これが吹き飛ばされた．1945 年にドイツと日本が降伏し戦争が終わって程なく，Pauli は Casimir に言った．「Onsager の 2 次元 Ising lattice を除けば，大戦中の物理の進歩なんて何もない！」

後年，Onsager の没後になるが，素粒子理論分野で標準理論から抜け出る試みの一つに，Onsager の解の algebra の再吟味がある．

6. 第二次大戦後の基礎物理開花期

物理学の主要舞台はヨーロッパからアメリカ合衆国に移る．そして 1950 年代以降は de Haas–van Alphen 効果，超流動，超伝導の磁束量子化等，次々に現れた新しい実験結果に直面し，Onsager は，彼本来の簡明な結果を獲得する，という実証的研究に戻る．de Haas–van Alphen 効果の Onsager の公式については既に述べたので，超流動に触れておく．

超流動の臨界速度に渦の発生が本質的役割を果たし，その渦は量子化されていることに Lars は早くから気づいていた．であるから Fairbank の磁束量子化の発見とほぼ同時に単位磁束が $(hc/2e)$ であるという論文を *Phys. Rev. Letters* に発表している．今では当り前のようだが，それまでの Ginsburg–Landau 方程式では，今は $2e$ と書かれているところが e とされていた．これでは単位磁束が (hc/e) となってしまうが，BCS 理論が登場し $(hc/2e)$ か，どちらか，理論家の間でも意見が割れていた時代であった．Lars は Fairbank の発見以前から単位磁束は $(hc/2e)$ だと言っていた．これは Leon Cooper による「Fermi 面上の電子が造る擬結合対」の発見を Lars がいち早く受け入れた結果で，当時の新進気鋭であった Feynman の証言が面白い．Cooper についてまだ賛否両論の頃の話である．「ある時，Onsager と私が一緒に立っていると，見知らぬ青年がきて，“超伝導のメカニ

ズムを解明できました”と言って説明を始めたが，自分にはさっぱり分からなかった．私の悪いくせで，分からないものはナンセンスだと思った．ところが驚いたことに，Onsager は“その考えはよさそうだね”と言った．あの青年は Cooper だったに違いない」．

大戦後に彗星のごとく現れた Feynman は，1948年に論文 Space-Time Approach to Quantum Mechanics を発表し，注目を集めていた．その彼が超流動問題を解決した，という噂は1953年，当時，学部学生であった筆者まで耳にした．1954年，京都で理論物理の国際会議に招かれて講演した彼の講義は予想に反し謙虚であった．講演前夜の夕食が Lars の隣席になり，Lars から「君は He を解決したと思っているのか」と聞かれ，「そうです」と答えると，Lars は一言「フム」．「あ！賛成でない」と感じた Feynman は講演では自分が相転移での熱力学関数に無知であることを率直に詫びた．質問では Lars が真っ先に立ってこう述べた．「相転移近傍の熱力学関数のことは He であろうが他のどんな物質であろうが，よく分かっていない．そのことが He の他の現象の理解について彼がし遂げたことの価値を僅かでも損ねるものではありません」．

^{4}He の超流動の解釈問題では，当時 London による Bose Einstein Condensation（BEC）説と，Landau によるその全面否定説とがあった．Onsager が Oliver Penrose と共に *Phys. Rev.* に発表した論文（1956年）では，BEC は確実にある，と立証した．もちろん教科書にある BEC ではない．基底状態では運動量 $=0$ の一粒子状態にいる粒子数の期待値 n_0 は ^{4}He の密度を固定した場合，全粒子数 N とともにそれに比例して増加することを示したのである．つまり n_0 は統計力学でいう extensive な量だというのである．これに反し $p \neq 0$ の一粒子状態にいる粒子数 n_p の期待値は N を増加しても増えない．つまり intensive な量である．Penrose–Onsager はもう少し立ち入って，一粒子密度行列の最大固有値 n_M が extensive であることと，^{4}He を直径 2.6 A の剛体球として，流体の密度を closed packing の 0.28 とした場合，n_M/N が約 0.08 になることを示した．$p=0$ の一粒子状態にいる粒子数は全粒子数の 8%以下である，ということになる．これは最近になって，Laser trapped cold atoms において実測されるようになった．He 原子の電子数は cold atom の電子数よりはるかに少ないが，液体 ^{4}He では原子数が多い．そこで観測される日も近いであろう．もう観測されているかもしれない（なお論文の中で Onsager が指摘していたように，n_0/N や n_M/N は二流体模型における超流動成分の粒子数密度ではない．後者は絶対零度では 1 になるはずだ．また O. Penrose は Sir Roger Penrose ではない）．

そして 1968 年に Nobel 化学賞の単独受賞者に指名され，当然のことながら次々に栄誉に浴された．1972 年に Yale を退職後は University of Miami at Coral gables で Distinguished University Professor として迎えられた．そこでは biophysics, 主として neuro science, に熱中していた．1976年に亡くなられた．朝いつものように水泳に行こうとしておられたようで，水着になってベッドに臥し，平和に安らかに熟睡しているような様子であられたという．

本稿の Onsager episodes は C. Longuet-Higgins と M.E. Fisher が 1991 年に *National Academy of Sciences* に書いた Biographical Memoir が参考になっている．本稿ではページ数の関係で書けなかった数々のエピソードがそこにはある．また極性電解質溶液の理論についても書かなかった．そこでは Debye 先生にせっかくの論文を却下された話，また今でも残されている問題もある．その関連では，氷の問題もある．

（いずやま・たけお，東京大学名誉教授）

特　集（2011年6月号予告）

物理イメージと数式表現

発想と思考の補助線をたどる

本体952円

編集後記

最初の講義，とりわけ大学に入学してから最初の講義では，一体，どういったことをするのだろう，この講義は難しいのだろうか，受けてみてからは，これは難しい，やっていけるだろうか，などといろいろ思いを馳せたものです．

記事を読んでみると，様々な分野で悩ませる概念があるようです．また，各記事では計算例が載っているものもありますので，読者の皆さんもノートを傍らに置いて，手を動かしながら，読んでみてはいかがでしょうか．山崎先生の記事で「本来は，計算をしていくうちに，数学の魅力が生まれてくることも多いので，是非，面倒な計算を厭わないでほしい.」とあります．たくさんの計算をすることも悩ませている原因を払拭するきっかけになるのかもしれません．　(R)

数　理　科　学　5月号

2011年5月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所 ⓒ 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁